

53574

Seat No. _____

Third Year B. A. / B. Sc. Examination

April / May – 2003

Statistics : Paper - VII

(Statistical Inference & Design of Experiment)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 70

સૂચના : (૧) બધા પ્રશ્નોના ગુણ સરખા છે.

(૨) આંકડાશાસ્ત્રીય કોષ્ટકો અને ગ્રાફપેપર્સ માંગવાથી મળી રહેશે.

(૩) સાયન્ટિફિક કેલક્યુલેટર વાપરવાની છૂટ છે.

૧ (અ) અનભિનત આગણનકારના વિચરણની નીચલી સીમા અંગેનું જાણીતું પરિણામ લખો અને સાબિત કરો. તે પરિણામમાં સમતા ચિહ્ન મેળવવા માટેની શરતો જણાવો.

(બ) જો $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ પરિમિત વિચરણ σ^2 વાળી સમષ્ટિમાંથી લીધેલ

નિદર્શ હોય તો સાબિત કરો કે નિદર્શ વિચરણ $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ એ σ^2 નો

અભિનત આગણનકાર છે. σ^2 નો અનભિનત આગણનકાર સૂચવો.

(ક) નીચેના વિતરણમાંથી લીધેલ n કદના નિદર્શ અવલોકનોના આધારે θ નો લઘુત્તમ

વિચરણ સીમાબદ્ધ આગણનકાર છે કે કેમ તે ચકાસો. $V\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)$ શોધો :

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta} \cdot e^{-x^2/2\theta^2}; \quad -\infty \leq x \leq \infty.$$

અથવા

53574]

1

[Contd....

- ૧ (અ) રાવ-બ્લેકવેલ પ્રમેય જણાવો અને સાબિત કરો.
 (બ) ધારે કે X_1, X_2, \dots, X_n એ સંભાવના ઘટત્વ વિધેય
 $f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}$; $\theta < x < \infty$; $-\infty < \theta < \infty$ વાળા વિતરણમાંથી
 લીધેલ એક યદ્યચ્છ નિદર્શ હોય તો θ માટે પર્યાપ્ત આગણનકાર મેળવો.
 (ક) જો T એ θ નો સંગત આગણનકાર હોય તો બતાવો કે T^2 એ θ^2 નો સંગત
 આગણનકાર છે.

- ૨ (અ) નેમન-પિયર્સનની પ્રમેયિકા લખો અને સાબિત કરો.
 (બ) 16 ગાયોવાળા યદ્યચ્છ નિદર્શને જ્યારે નવો ખોરાક આપવામાં આવ્યો ત્યારે સરેરાશ
 વધારો 20 કિલોગ્રામ જેટલો થયો. ધારો કે વજનમાં થયેલ વધારો $N(\mu, \sigma^2)$ છે
 જ્યાં $\sigma^2 = 4$. નવા ખોરાકને લીધે વજનમાં થયેલ અપેક્ષિત વધારા માટે 95%
 વિશ્વસનીય અંતરાલ શોધો.

અથવા

- ૨ (અ) નીચેનાં પદો સમજાવો :
 (૧) પ્રથમ અને દ્વિતીય પ્રકારના દોષની સંભાવના
 (૨) સાદી વિરુદ્ધ સંયુક્ત પરિકલ્પના
 (૩) અસ્વીકૃતિ ક્ષેત્ર
 (૪) પરીક્ષણનું સામર્થ્ય.
 (બ) ધારો કે x એ પ્રાયલો 3 અને p વાળા દ્વિપદી વિતરણને અનુસરે છે.

$H_0 : p = p_1 = \frac{1}{4}$ વિરુદ્ધ $p = p_1 > \frac{1}{2}$ પરીક્ષણ કરવાનું વિચારીએ છીએ. જો

$x \leq 1$ હોય તો H_0 સ્વીકારવાનું સંમત થઈશું ? પ્રથમ પ્રકાર અને દ્વિતીય પ્રકાર

દોષનું ક્ષેત્રમાન અને પરીક્ષણનું સામર્થ્ય વિધેય મેળવો તથા $p = \frac{3}{4}$ અને $p = 1$

આગળ સામર્થ્યો મેળવો.

- ૩ (અ) પ્રચલોના આગણન માટેની પ્રઘાતોની રીત સમજાવો. મહત્તમ વિસંભાવના આગણનકારના ગુણધર્મો જણાવો.
- (બ) નીચેના વિતરણમાં પ્રચલ θ નો મહત્તમ વિસંભાવના આગણનકાર અને $V(\hat{\theta})$ શોધો.

$$dF = \frac{x^{p-1} \cdot e^{-x/\theta}}{\Gamma(p) \theta^p} dx; \quad 0 \leq x \leq \infty \text{ જ્યાં } p \text{ જ્ઞાત છે.}$$

- (ક) નીચેના વિતરણ માટે α અને β નું પ્રઘાતોની રીતે આગણન કરો :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} ; \quad 0 \leq x \leq \infty$$

$$= 0 ; \quad \text{અન્યત્ર}$$

અથવા

- ૩ (અ) (૧) વ્યાપક સુરેખ પરિરૂપ માટેની મૂળભૂત ધારણાઓ જણાવો.
- (૨) શ્રેષ્ઠ સુરેખ અનભિનત આગણનકારની વ્યાખ્યા આપો અને તેના ગુણધર્મો જણાવો.
- (બ) સ્થિર અસરવાળું મોડેલ લઈને એકવિધ વર્ગીકરણ માટે વિચરણના પૃથક્કરણની રીત સંપૂર્ણપણે સમજાવો.

- ૪ (અ) સંપૂર્ણ ચદચ્છ રચના સાપેક્ષ ચદચ્છ બ્લોક રચનાની સાપેક્ષ દક્ષતા મેળવો.
- (બ) લેટિન ચોરસ રચનાનું આંકડાશાસ્ત્રીય પૃથક્કરણ આપો.

અથવા

- ૪ (અ) ઘઉંની 5 જાતોનું ઉત્પાદન સરખાવવા માટે ખેતીવિષયક પ્રયોગની રચના કરવાની છે. આ માટે $AB = 25$ એકમ લંબાઈ અને $AD = 15$ એકમ લંબાઈનો એક લંબચોરસ $ABCD$ જમીનનો ટુકડો પ્રાપ્ય છે. બાજુ AD થી બાજુ BC તરફ જતાં

જમીનની ફળદ્રુપતામાં વધારો થાય છે. 5×3 ચોરસ એકમના પ્લોટ હોવા જરૂરી છે. આ પ્રયોગ માટે યોગ્ય રચના સૂચવો અને તમારી પસંદગી અને ગોઠવણી માટેનાં કારણો આપો. વિચરણ પૃથક્કરણ કોષ્ટક આપો તથા તમે સૂચવેલ રચનાનું મોડેલ જણાવો.

- (બ) (૧) સંપૂર્ણ ચદચ્છ રચનાની રચના અને ફાયદાઓ આપો.
 (૨) પ્રયોગ રચના માટેના મૂળભૂત સિદ્ધાંત જણાવો.
 (૩) સંપૂર્ણ ચદચ્છ રચના સાપેક્ષ લેટિન ચોરસરચના સાપેક્ષ અને ચદચ્છ બ્લોક રચના સાપેક્ષ લેટિન ચોરસ રચના સાપેક્ષ દક્ષતા મેળવવા માટેનું સૂત્ર લખો.
 (૪) વ્યાખ્યા આપો : પ્રાયોગિક એકમ, પુનરાવર્તન.

પ (અ) વ્યાખ્યા આપો :

- (૧) સંકીર્ણતા
 (૨) અવયવી પ્રયોગ
 (૩) લંબચ્છેદીય તફાવત.

(બ) 2^2 ક્રમગુણિત પ્રયોગનું પૃથક્કરણ સમજાવો.

(ક) ચાર વખત અસર પુનરાવર્તન થાય તેવા 2^3 અવયવી પ્રયોગમાં સ્વાતંત્ર્યમાત્રાનું પૃથક્કરણ આપો.

અથવા

પ (અ) 2^3 ક્રમગુણિત પ્રયોગમાં વિવિધ ક્રમગુણિત અસરોના સરવાળાની ગણતરી કરવા માટે યેટ્સની પદ્ધતિ સમજાવો.

(બ) અવયવી અસરોતે અને તેના વર્ગોના સરવાળાને અસરોના સરવાળાના સ્વરૂપમાં જણાવો.

(ક) ધારો કે 3 ઘટકો, A , B અને C પ્રત્યેક બે કક્ષાએ આપેલા છે. પ્રત્યેક પુનરાવર્તનમાં બે બ્લોક હોય અને પ્રત્યેક બ્લોકમાં 4 પ્લોટ હોય તેવા 2 પુનરાવર્તનવાળા પ્રયોગની રચના આપો કે જેમાં AB અને BC સંકીર્ણ થયેલ હોય.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) All questions carry **equal** marks.
(2) Statistical tables and graph papers will be supplied on demand.
(3) Scientific calculator is allowed.

- 1** (a) State and prove a well-known result about the lower bound of an unbiased estimator. State the conditions for getting equality sign in that result.
(b) If $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ is sample taken from a population having a finite variance σ^2 . Show that the sample variance

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ is a biased estimator. Suggest an unbiased}$$

estimator of σ^2 .

- (c) Verify whether minimum variance bound estimator of θ exist or not on the basis of sample observations of size n from the following distribution :

$$\text{Find } V \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \right).$$

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \theta} \cdot e^{-x^2/2\theta^2}; \quad -\infty \leq x \leq \infty.$$

OR

- 1** (a) State and prove Rao-Blackwell theorem.
- (b) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from a distribution with p.d.f.
- $$f(x; \theta) = e^{-(x-\theta)}; \quad \theta < x < \infty; \quad -\infty < \theta < \infty; \text{ obtain}$$
- sufficient statistic for θ .
- (c) If T is consistent estimator of θ then show that T^2 is a consistent estimator of θ^2 .
- 2** (a) State and prove Neyman-Pearson lemma.
- (b) A random sample of 16 cows showed an average increase of 20 kg. when a new diet is administered. Assuming that the increase in weight is a $N(\mu, \sigma^2)$ with $\sigma^2 = 4$. Obtain a 95% confidence interval for the expected increase in weight due to this new diet.

OR

- 2** (a) Explain the following terms :
- (1) Probability of type-I and type-II errors.
 - (2) Simple versus composite hypothesis
 - (3) Critical region
 - (4) Power of a test.
- (b) Let x follows a binomial distribution with parameters 3 and p . We desire to test $H_0 : p = p_1 = \frac{1}{4}$ against $p = p_1 > \frac{1}{2}$ by agreeing to accept H_0 : if $x \leq 1$; calculate the size of the type - I and II errors. Obtain power function of the test and powers at $p = \frac{3}{4}$ and $p = 1$.

- 3** (a) Explain the method of moments. State the properties of maximum likelihood estimators.
- (b) Find the M.L. estimate of the parameter θ and $V(\hat{\theta})$ in the following distribution :

$$dF = \frac{x^{p-1} \cdot e^{-x/\theta}}{p \theta^p} dx; \quad 0 \leq x \leq \infty \text{ where } p \text{ is known.}$$

- (c) Estimate α and β by the method of moments for the following distribution :

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} & ; \quad 0 \leq x \leq \infty \\ = 0 & ; \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

OR

- 3** (a) (1) State basic assumptions underlying general linear model.
 (2) Define Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) and state its properties.
- (b) Explain fully the technique of analysis of variance for one-way classification taking fixed effect model.
- 4** (a) Obtain relative efficiency of a R.B.D. w.r.t. C.R.D.
 (b) Give statistical analysis of L.S.D.

OR

- 4** (a) It is required to plan an agricultural experiment in which yields of five varieties of wheat are to be compared. A rectangular piece of land $ABCD$ with $AB = 25$ units of length and $AD = 15$ units of length is available for the experiment.

It is known that the fertility of the soil increases as one passes from the side AD to the side BC . It is desirable to have plots of size 5×3 square units. Suggest as suitable design for this experiment giving reasons for your choice and the layout. Give the analysis of variance table. State the model for the design you suggest.

- (b) (1) Give layout and advantages of C.R.D.
- (2) State basic principles of design of experiment.
- (3) Write the formula for obtaining the relative efficiency of a L.S.D. w.r.t. C.R.D. and w.r.t. R.B.D.
- (4) Define : Experimental unit, Replication.

- 5 (a) Define :
- (1) Confounding
 - (2) Factorial experiment
 - (3) Orthogonal contrasts.
- (b) Explain analysis of 2^2 factorial experiment.
- (c) Give the analysis of degrees of freedom in a 2^3 factorial experiment in four replication.

OR

- 5 (a) Explain the Yate's method for computing various factorial effect totals in 2^3 factorial experiment.
- (b) Express the factorial effects in terms of treatment totals. And express its S:S in terms of treatment totals.
- (c) Suppose that we have 3 factors A , B and C each at two levels. Give the plan of the experiment conducted in 2 replications each consisting of two blocks of 4 plots each such that AB and BC are confounded.