NA–564 Seat No. ______

Third Year B. A. / B. Sc. Examination

April / May – 2003

Statistics : Paper - VI

(Mathematical Statistics)

Time : **3** Hours] [Total Marks : **70**

સૂચના : (૧) બધા પ્રશ્નોના ગુણ **સરખા** છે.

(૨) આંકડાશાસ્ત્રીય કોષ્ટકો અને ગ્રાફ પેપર્સ માંગવાથી મળી રહેશે.

(૩) સાયન્ટિફિક કૅલક્યુલેટર વાપરવાની છૂટ છે.

૧ (અ) મહા સંખ્યાઓનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

(બ) વિતરણ :

$$f(x) = 2^{-x},\ x = 1,\ 2,\ 3,......$$
$$= 0, \quad \text{અન્યથા}$$

માટે સાબિત કરો કે શેબિશેવ અસમતા દ્વારા $P[|x-2| \le 2] \ge \frac{1}{2}$ મળે,

જ્યારે $P[|x-2| \le 2]$ની ચોક્કસ કિંમત $\frac{15}{16}$ છે.

(ક) શેબિશેવ અસમતાનું વ્યાપક સ્વરૂપ લખો અને સાબિત કરો.

અથવા

૧ (અ) લાક્ષણિક વિધેય પરનું પ્રતિપન વિધેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) યદચ્છ ચલ Xનું લાક્ષણિક વિધેય $\phi(t) = \frac{\sin t}{t}$ છે, તો Xનું વિતરણ મેળવો.

(ક) કેન્દ્રિય લક્ષ પ્રમેયનું લીન્ડબર્ગ–લેવી સ્વરૂપ લખો અને સાબિત કરો.

૨ (અ) પૉયસન વિતરણ અને ગામા વિતરણના સંયુક્ત વિતરણ તરીકે ઋણ દ્વિપદીક વિતરણ મેળવો.

(બ) સંભાવના ઘટત્વ વિધેય :

$$f(x,\ y) = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$
$$-x < y < x$$

માટે શરતી ઘટત્વ વિધેયો $f\left(x/y\right)$ અને $f\left(y/x\right)$ મેળવો.

(ક) સંયુક્ત વિતરણ ધરાવતા X અને Y ચલોના સીમાન્ત અને શરતી વિતરણોની વ્યાખ્યા આપો.

અથવા

૨ $BN(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$ વિતરણ માટે :

(૧) x અને yનું સંયુક્ત સંભાવના ઘટત્વ વિધેય લખો.

(૨) x અને yના સીમાન્ત અને શરતી વિતરણો લખો.

(૩) સાબિત કરો કે, જો $\rho = 0$, હોય તો ચલ x અને y નિરપેક્ષ છે.

(૪) આ વિતરણનું પ્રઘાત સર્જક વિધેય મેળવો અને તે દ્વારા બતાવો કે $E(x) = \mu_1$,

$E(y) = \mu_2$, $V(x) = \sigma_1^2$, $V(y) = \sigma_2^2$, $\text{cov}(x,\ y) = \rho\ \sigma_1\ \sigma_2$.

૩ (અ) ઘાત શ્રેણી (power series) વિતરણની વ્યાખ્યા આપો અને તેના મધ્યક તથા વિચરણ મેળવો.

(બ) ઘાત શ્રેણી વિતરણ માટે, સાદી પ્રઘાતો અંગેનું ચલિત સંબંધ ધરાવતું સૂત્ર મેળવો.

(ક) ઘાત શ્રેણી વિતરણનાં વિશિષ્ટ સ્વરૂપ તરીકે ગુણોત્તર વિતરણ મેળવો.

અથવા

૩ (અ) બહુપદી (multinomial) વિતરણની વ્યાખ્યા આપો, અને તેનાં સંયુક્ત અને શરતી વિતરણો મેળવો.

(બ) બહુપદી વિતરણનું પ્રઘાત સર્જક વિધેય મેળવો અને તે પરથી $E(x_i)$, $E(x_i, x_j)$, $V(x_i)$ મેળવો.

(ક) ઘાત શ્રેણી વિતરણ માટે, પ્રચલિત સંકેતો અનુસાર સાબિત કરો કે :

$$K_{r+1} = Z\frac{dK_r}{dZ}.$$

૪ (અ) કાય સ્ક્વેર વિતરણ માટે બહુલક, β_1 અને β_2 મેળવો.

(બ) 't' વિતરણ અને $F-$ વિતરણ વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

અથવા

૪ (અ) સ્ટુડન્ટ 't' નું ઘટત્વ વિધેય લખો અને તેના પ્રથમ બે પ્રઘાતો મેળવો.

(બ) બતાવો કે $F-$ વિતરણનો બહુલક હમેશાં એકથી ઓછો હોય છે.

૫ નીચેનામાંથી કોઈ પણ **બે** લખો :

(અ) ક્રમિત સંખ્યાઓ માટે મહત્તમ પ્રાપ્તાંકનું વિતરણ મેળવો.

(બ) ક્રમિત સંખ્યાઓ માટે વિસ્તારનું વિતરણ મેળવો.

(ક) સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\theta}, \qquad 0 < x < \theta \\ &= 0, \qquad \text{અન્યત્ર} \end{aligned}$$

વાળી સમષ્ટિમાંથી 4 કદના નિદર્શ માટે ક્રમિત પ્રાપ્તાંકો $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ હોય તો (૧) $E(y_4)$ (૨) $P_r(y_4 < 3)$ શોધો.

(૬) જો $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ એ વિતરણ

$$f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$
$$= 0, \quad \text{અન્યત્ર}$$

માંથી લીધેલ યદચ્છ નિદર્શ હોય તો ક્રમિત સંખ્યાઓનો વિસ્તાર (w)નું

વિતરણ મેળવો. $P\left(\text{range} \quad w < \frac{1}{2}\right)$ શોધો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) **All** questions carry **equal** marks.

(2) Statistical tables and graph papers will be supplied on demand.

(3) Scientific calculator is allowed.

1 (a) State and prove law of large numbers.

(b) For the distribution

$$f(x) = 2^{-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$
$$= 0, \quad \text{elsewhere}$$

show that Chebychev's inequality gives $P\left[|x-2| \le 2\right] \ge \frac{1}{2}$,

while the actual probability of $P\left[|x-2| \le 2\right]$ is $\frac{15}{16}$.

(b) State and prove general form of Chebychev's inequality.

OR

1 (a) State and prove inversion theorem on characteristic function.

(b) The characteristics function of a random variable X is $\phi(t) = \frac{\sin t}{t}$. Find the distribution of X.

(c) State and prove Lindberg-Levy form of central limit theorem.

2 (a) Obtain negative binomial distribution as a compound distribution of Poisson distribution and gamma distribution.

(b) Obtain conditional density functions $f\left(\frac{x}{y}\right)$ and $f\left(\frac{y}{x}\right)$ for the p.d.f.

$$f(x,\ y) = \frac{1}{8}(x^2 - y^2)e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$
$$-x < y < x$$

(c) Define marginal and conditional distributions for the jointly distributed random variables X and Y.

OR

2 For $BN\,(\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \rho)$ distribution :

(1) State the joint p.d.f. of this distribution.

(2) State the marginal and conditional distributions of x and y.

(3) Prove that x and y are independent if $\rho = 0$.

(4) Obtain M.G.F. of this distribution and hence show that $E(x) = \mu_1,\ E(y) = \mu_2,\ V(x) = \sigma_1^2,\ V(y) = \sigma_2^2,\ \text{cov}(x,\ y) = \rho\ \sigma_1\ \sigma_2.$

3 (a) Define power series distribution and obtain its mean and variance.

(b) Obtain recurrence relation of raw moments for power series distribution.

(c) Obtain geometric distribution as a special case of power series distribution.

OR

3 (a) Define multinomial distribution and obtain its marginal and conditional distributions.

(b) Obtain moment generating function of multinomial distribution and hence obtain $E(x_i)$, $E(x_i,\ x_j)$, $V(x_i)$.

(c) For power series distribution, with usual notations, prove that

$$K_{r+1} = Z\frac{dK_r}{dZ}.$$

4 (a) Obtain mode, β_1 and β_2 of chisquare distribution.

(b) Obtain the relation between 't' and F–distribution.

OR

4 (a) State the density function of student's 't' and find its first two moments.

(b) Show that mode of $F-$ distribution is always less than one.

5 Write any **two** of the following :

(a) Obtain the distribution of largest observation in order statistics.

(b) Obtain the distribution of range of observations in order statistics.

(c) Let $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ be in order statistics of a random sample drawn from p.d.f.

$$f(x) = \frac{1}{\theta}, \qquad 0 < x < \theta$$

Find : (1) $E(y_4)$ (2) $P_r(y_4 < 3)$.

(d) Let $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ be random sample drawn from distribution :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}, & 0 < x < \infty \\ &= 0, & \text{elsewhere} \end{aligned}$$

Find the distribution of range (w) in order statistics

find $P\left(\text{Range } w < \frac{1}{2}\right)$.