55594

Seat No. ______

Third Year B. A. / B. Sc. Examination

April / May – 2003

Statistics : Paper - IX

(Mathematical Methods)

Time : **3** Hours] [Total Marks : **105**

સૂચના : (૧) બધા પ્રશ્નોના સમાન ગુણ છે.

(૨) સાયન્ટિફિટ કેલક્યુલેટર વાપરવાની છૂટ છે.

(૩) આંકડાશાસ્ત્રીય કોષ્ટક અને ગ્રાફપેપર વિંનતી કરવાથી મળી શકશે.

૧ (અ) વ્યાખ્યા આપો : શ્રેણી અને તેની અભિસારિતા. અભિસારી શ્રેણી સીમિત હોય છે એમ બતાવો. તેનું પ્રતિપ્રમેય હંમેશાં સાચું હોતું નથી એમ ઉદાહરણથી બતાવો.

(બ) સમગુણોત્તર શ્રેણી $\{r^n\}$ની અભિસારિતા ચકાસો.

(ક) કોશી શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપો. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ કોશી શ્રેણી છે એમ બતાવો.

અથવા

૧ (અ) અનંત શ્રેઢીની અભિસારિતાની વ્યાખ્યા આપો. તેની અભિસારિતા માટેની જરૂરી શરત જણાવો અને સાબિત કરો એ પર્યાપ્ત છે ? ઉદાહરણ આપો.

(બ) અનંત શ્રેઢીની અભિસારિતા ચકાસવા માટેનાં પરીક્ષણો વર્ણવો.

(ક) શ્રેઢીની અભિસારિતા ચકાસો :

(૧) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\ldots\ldots$

(૨) $\sum \frac{n!}{n^n}$.

૨ (અ) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ની વ્યાખ્યા આપો. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = e$ સાબિત કરો.

(બ) વિધેયનું ડાબી બાજુનું લક્ષ અને જમણી બાજુનું લક્ષ વ્યાખ્યાયિત કરો. $f(x)=[x]$ માટે $x=1$ માટે એ મેળવો અને તેમનું અર્થઘટન કરો.

(ક) વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરી $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{4x-7}$ની કિંમત શોધો.

અથવા

૨ (અ) વિધેયની અસતતતાના વિવિધ પ્રકારો વર્ણવો. નીચે આપેલા વિધેયનો પ્રકાર વર્ણવો :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{a} - a \quad , \qquad 0 \le x < a \\
&= 0 \qquad\quad\;\; , \qquad x = a \\
&= a - \frac{x^3}{a^3} \quad , \qquad x > a
\end{aligned}
$$

(બ) જો વિધેય f અને g સતત હોય તો $f \pm g$ પણ સતત છે એમ સાબિત કરો.

(ક) વિધેયની એકરૂપ સાતત્ય (Uniform convergence)ની વ્યાખ્યા આપો. સાબિત કરો કે $f(x)=x^2$, $[a,\ b]$માં એકરૂપ સતત છે. પણ $[a,\ \infty[$, $a>0$માં નથી.

૩ (અ) ગણની ન્યૂનતમ ઉર્ધ્વસીમા અને મહત્તમ અધ:સીમા ઉદાહરણ આપી સમજાવો. તેમના અસ્તિત્વ અને અનન્યતા બાબત શું કહી શકાય ? નીચે આપેલા ગણ માટે, અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોય તો ન્યૂનતમ ઉર્ધ્વસીમા અને મહત્તમ અધ:સીમા શોધો :

(૧) $\left\{x \in Q,\ x^2 < 2\right\}$

(૨) $\left\{\frac{5n+2}{n},\ n \in N\right\}$.

(બ) જો S સંપૂર્ણ ક્રમિક ક્ષેત્ર Fનો સીમિત ઉપગણ હોય તો glb S અને lub S Fમાં અસ્તિત્વ ધરાવે છે અને $\text{glb}\,S \le \text{lub}\,S$ છે એમ સાબિત કરો.

(ક) $n \in N$ માટે $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ સાબિત કરો. જે પરિણામનો તમે ઉપયોગ કર્યો હોય તે સ્પષ્ટપણે દર્શાવો.

અથવા

૩ (અ) સમજાવો :

(૧) માનાવકાશ

(૨) અંતર્ગત ગણ

(૩) ગણના લક્ષબિંદુઓ

(૪) સંવૃત્ત અને વિવૃત્ત ગણ.

(બ) ગણની સંવૃત્તતા (closure)ની વ્યાખ્યા આપો. સંવૃત્ત ગણની સંવૃત્તતા સંવૃત્ત છે. એમ સાબિત કરો.

(ક) સુબદ્ધ ગણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં બે ઉદાહરણ આપો. વળી (૧) અંતરાલ ન હોય એવા વિવૃત્ત ગણ (૨) સંવૃત્ત-વિવૃત્ત (Clopen) ગણ (૩) સંવૃત્ત પણ ન હોય અને વિવૃત્ત પણ ન હોય (૪) જેનો યોગગણ વિવૃત્ત હોય એવા અવિવૃત્ત (non-open) એવા ગણનાં ઉદાહરણ આપો.

૪ (અ) રીમાન-સ્ટીલજીસ સંકલની વ્યાખ્યા આપો. અને તેના અગત્યના ગુણધર્મો જણાવો.

(બ) જો p^* એ pનું વૃદ્ધિકરણ હોય તો સાબિત કરો કે :

(૧) $L(p, f, \alpha) \le L(p^*, f, \alpha)$

(૨) $U(p^*, f, \alpha) \le U(p, f, \alpha)$.

(ક) જો $f(x) = x$ અને $\alpha(x) = x^2$ હોય તો $\int_0^1 f \, d\alpha$ અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો શોધો.

અથવા

૪ (અ) સંકલન ચિહ્ન હેઠળ વિકલન માટે લિબનિટ્ઝનો પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) જેકોબિયનની વ્યાખ્યા આપો.

$x = u+v+w$, $y = uv+vw+wu$, $z = uvw$ માટે $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ શોધો.

x, y, z વચ્ચે વિધેયાત્મક સંબંધ, હોય તો શોધો.

(ક) ગમે તે **એક**નો જવાબ લખો :

(૧) લિબનિટ્ઝના નિયમનો ઉપયોગ કરી $\frac{d}{dt}\int_{t^3}^{2} \log(1+x^2)dx$નું મૂલ્ય શોધો.

(૨) જો $y_1 = x_1(1-x_2)$

$y_2 = x_1 x_2(1-x_3)$

$y'_{n-1} = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_{n-1}(1-x_n)$

$y_n = x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ હોય તો

$\frac{\partial(y_1,\ y_2, \ldots\ldots, y_n)}{\partial(x_1,\ x_2, \ldots\ldots,\ x_n)}$ શોધો.

૫ (અ) ત્રણ ચલ માટે ડિરીશ્લેનો પ્રયોગ લખો અને સાબિત કરો.

(બ) $x=0,\ y=0,\ x+y=1$થી સીમિત પ્રદેશ માટે

$\iint x^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{2}}\ (1-x-y)^{2/3}\ dx\, dy$નું મૂલ્ય શોધો.

(ક) જો $h>0$ માટે $I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ હોય તો Iની કિંમત શોધો. તે

પરથી $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}dx$નું મૂલ્ય શોધો.

અથવા

૫ (અ) r ત્રિજ્યાવાળા n–પરિમાણવીય કોલકનું કદ ડિરીશ્લેના પ્રમેયથી શોધવાની રીત વર્ણવો.

(બ) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z=1$થી સીમિત ગોળા $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$નું કદ શોધો.

(ક) જો $f(x,\ y) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}Q},\ -\infty < x < \infty$ જ્યાં

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-10}{0.5}\right)^2 - 4\rho\,(x-10)\ (y-12)+(y-12)^2\right]$$

દ્વિચલ સંભાવના ઘટત્વ વિધેય હોય તો cનું મૂલ્ય શોધો.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) All questions carry **equal** marks.

(2) Use of scientific **calculator** is allowed.

(3) Statistical **tables** and **graph** papers will be supplied on required.

1 (a) Define a sequence and its convergence. Show that a convergent sequence is always bounded. Give an example to show that its converse is not always true.

(b) Examine the convergence of the geometric sequence $\{r^n\}$.

(c) Define Cauchy sequence. Show that $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ is a Cauchy sequence.

OR

1 (a) Define the convergence of an infinite series. State and prove the necessary condition for the convergence of an infinite series. Is it sufficient ? Give an illustration.

(b) Describe the tests used to determine the convergence of an infinite series.

(c) Examine the convergence of

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\ldots\ldots.$

(2) $\sum \frac{n!}{n^n}$.

2 (a) Define $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Show that $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = e$.

(b) Define left hand and right hand limits and a function. Obtain the same for $f(x)=[x]$ at $x=1$ and interpret them.

(c) Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{4x-7}$ using definition.

OR

2 (a) Describe various types of discontinuities of function. Determine the nature of

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{a} - a \quad , \quad 0 \le x < a \\ &= 0 \quad , \quad x = a \\ &= a - \frac{x^3}{a^3} \quad , \quad x > a \end{aligned}$$

(b) If function f and g are discontinuous, show that $f \pm g$ is also continuous.

(c) Define uniform continuity of a function. Show that $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on $[a, b]$ but not on $[a, \infty[$, $a > 0$.

3 (a) Explain least upper bound and greatest lower bound set giving illustrations. What can you say about their existence and uniqueness ? Find the least upper bound and greatest lower bound for the sets

(1) $\{x \in Q,\ x^2 < 2\}$

(2) $\left\{\dfrac{5n+2}{n},\ n \in N\right\}$.

(b) If S is a bounded subset of a complete ordered field F, then show that glb S and lub S exist in F and $\operatorname{glb} S \le \operatorname{lub} S$.

(c) Show that for $n \in N$, $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. State clearly the result you have used.

OR

3 (a) Explain :

(1) Metric space

(2) Interior of a set

(3) limit points of a set

(4) open and closed sets.

(b) Define closure of a set. Show that closure of a closed set is closed.

(c) Define a compact set and give two illustrations for it. Also give examples of :

(i) an open set which its not an interval.

(ii) a set which is clopen.

(iii) a set which its neither open nor closed.

(iv) Two non-open sets whose union is open.

4 (a) Define Riemann-Stieltijes integral and state its important properties.

(b) If p^* be the refinement of p, then prove that :

(1) $L(p,\ f,\ \alpha) \le L(p^*,\ f,\ \alpha)$

(2) $U(p^*,\ f,\ \alpha) \le U(p,\ f,\ \alpha)$.

(c) If $f(x) = x$ and $\alpha(x) = x^2$, find $\int_0^1 f\ d\alpha$ if it exists.

OR

4 (a) State and prove Leibnitz's theorem for differentiation under the integral sign.

(b) Define Jacobian. Find $\dfrac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(u,\ v,\ w)}$ if $x = u + v + w$, $y = uv + vw + wv$, $z = uvw$. Find the functional relationship between $x,\ y,\ z$ if there is any.

(c) Answer any **one** :

(1) Using the Leibnitz's rule, evaluate

$$\left[\frac{d}{dt}\int_{t^3}^{2} \log(1+x^2)\,dx\right].$$

(2) If $y_1 = x_1 (1 - x_2)$

$y_2 = x_1 x_2 (1 - x_3)$

$\vdots$

$y_{n-1} = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots x_{n-1}(1 - x_n)$

$y_n = x_1 x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$

then find $\dfrac{\partial (y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)}$.

5 (a) State and prove Dirichlet's theorem for three variables.

(b) Evaluate $\iint x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} (1 - x - y)^{2/3} \, dx \, dy$ over the domain D bounded by lines $x = 0, \; y = 0, \; x + y = 1$.

(c) If for $h > 0$, $I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(x^2 + y^2)} \, dx \, dy$ then find I. Hence obtain $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bx + c)} dx$.

OR

5 (a) Describe the use of Dirichlet's theorem in obtaining the volume of an n–dimensional sphere of radius r.

(b) Find the volume of the sphere $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, bounded by $x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0, \; x + y + z = 1$.

(c) If $f(x, y) = c \cdot e^{-\frac{1}{2} Q}, \; -\infty < x < \infty$ where

$$Q = \frac{1}{1 - \rho^2} \left[\left(\frac{x - 10}{0.5} \right)^2 - 4\rho (x - 10) \; (y - 12) + (y - 12)^2 \right]$$ is a bivariate density function; find the value of c.