NE-603 Seat No._________

Third Year B. A. / B. Sc. Examination

April / May – 2003

Mathematics : Paper – X

1 – Operations Research

2 - Mechanics

3 – Number Theory

4 – Pascal Programming

Time : Hours] [Total Marks :

1 – Operations Research

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નો **ફરજિયાત** છે.

(૨) **જમણી** બાજુના અંક સંબંધિત પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) જ્યાં કોઈ ઉલ્લેખ નથી ત્યાં સંકેતો પ્રચલિત છે.

(૪) પ્રશ્નપત્રમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો જ પ્રશ્નક્રમ ઉત્તરવહીમાં લખો.

૧ (અ) વ્યાખ્યા આપો : ૬

(૧) બહિર્મુખ ગણ

(૨) મૂળ શક્ય (વાજબી) ઉકેલ

(૩) બહિર્મુખ ગણનું શીર્ષ (શિરોબિંદુ).

(બ) જો S_F એ સુરેખ આયોજન સમસ્યાના તમામ શક્ય ઉકેલોનો ગણ હોય અને $S_F \neq \phi$, તો સાબિત કરો કે S_F બહિર્મુખ ગણ જ હોવો જોઈએ. ૭

(ક) નીચેની સુરેખ આયોજન સમસ્યાને આલેખની રીતે ઉકેલો : ૮

મહત્તમ કરો : $Z = 3x_1 + 2x_2$

જ્યાં $-2x_1 + x_2 \le 1$

$x_1 + x_2 \le 3$

$x_1 \le 2$

તથા $x_1, x_2 \ge 0$

અથવા

૧ (અ) વ્યાખ્યા આપો : ૪

(૧) વિકૃત મૂળ ઉકેલ

(૨) ઈષ્ટતમ ઉકેલ.

(બ) નીચેની સુરેખ આયોજન સમસ્યાને સિમ્પલેક્ષ રીતથી ઉકેલો : ૮

ન્યૂનતમ કરો : $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$

જ્યાં $-8x_1 - 3x_2 + 12x_3 + x_4 = 3$

$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$

$4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5$

તથા $x_i \geq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots\ldots, 6.$

(ક) નીચેની સુરેખ આયોજન સમસ્યાને મોટા M ની રીતથી ઉકેલો : ૯

મહત્તમ કરો : $Z = 6x_1 + 4x_2$

જ્યાં $2x_1 + 3x_2 \leq 30$

$3x_1 + 2x_2 \leq 24$

$x_1 + x_2 \geq 3$

તથા $x_1, x_2 \geq 0$

૨ (અ) સુરેખ આયોજન સમસ્યાને તેના પ્રમાણભૂત મૂળ સ્વરૂપમાં છે તેમ ક્યારે કહેવાય? આવી સમસ્યાનો દ્વંદ્વ વ્યાખ્યાયિત કરો. વળી સાબિત કરો કે દ્વંદ્વની દ્વંદ્વ એ મૂળ સમસ્યા છે. ૧૦

(બ) દ્વંદ્વતાના સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ કરીને નીચેની સુરેખ આયોજન સમસ્યા ઉકેલો : ૧૧

ન્યૂનતમ કરો : $Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

જ્યાં $x_1 + x_3 \geq 2$

$x_2 + x_3 \geq 5$

તથા $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

અથવા

૨ (અ) પૂર્ણાંક સુરેખ આયોજન સમસ્યા ઉકેલવા માટેની છેદતલની રીત (Cutting plane method) સમજાવો. ૧૦

(બ) છેદતલની રીતથી નીચેની પૂર્ણાંક સુરેખ આયોજન સમસ્યા ઉકેલો : ૧૧

મહત્તમ કરો : $Z = 4x_1 + 3x_2$

જ્યાં $x_1 + 2x_2 \le 4$

$2x_1 + x_2 \le 6$

તથા $x_1, x_2 \ge 0$ અને x_1, x_2 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે.

૩ (અ) ગમે તે **બે**ના જવાબ લખો : ૧૦

(૧) પરિવહન (વાહનવ્યવહાર)ની સમસ્યાનું ગાણિતિક સ્વરૂપ દર્શાવો.

(૨) પરિવહન સમસ્યા અને સોંપણી–સમસ્યા વચ્ચેનો તફાવત સમજાવો.

(૩) સોંપણી–સમસ્યા ઉકેલવાની રીતનું વર્ણન કરો.

(બ) નીચેની પરિવહન સમસ્યાનો ઈષ્ટતમ ઉકેલ શોધો : ૧૧

	D_1	D_2	D_3	પુરવઠો
O_1	2	7	4	5
O_2	3	3	1	8
O_3	5	4	7	7
O_4	1	6	2	14
માંગ	7	9	18	34

અથવા

(બ) જેના કિંમત સહગુણકો નીચેના કોષ્ટકમાં આપ્યા મુજબના હોય, તેવી 5×5 સોંપણી સમસ્યાનો ન્યૂનતમ કિંમત ઉકેલ મેળવો : ૧૧

	I	II	III	IV	V
A	16	18	20	17	19
B	18	20	22	19	22
C	17	18	17	22	19
D	17	17	16	17	16
E	20	18	19	17	20

૪ (અ) વ્યાખ્યા આપો : ૬

(૧) શૂન્ય સરવાળા રમત (zero – sum game)

(૨) મિશ્રિત વ્યૂહ (mixed strategy)

(૩) સંમિત રમત (symmetric game)

(બ) સાબિત કરો કે સંમિત રમતનું મૂલ્ય શૂન્ય હોય છે. ૮

(ક) નીચે આપેલ રમતને સામ્ય સુરેખ આયોજન સમસ્યા સ્વરૂપમાં પરિવર્તીત કરો : ૭

(ઉકેલ આવશ્યક નથી)

ખેલાડી–B

$$\textbf{ખેલાડી–A}\quad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

અથવા

૪ (અ) ધારો કે $f(x, y)$ એવું વિધેય છે કે જેથી બન્ને $\max_x \min_y f(x, y)$ અને ૭

$\min\limits_{y} \max\limits_{x} f(x, y)$ નું અસ્તિત્વ હોય. જો (x_0, y_0) એ $f(x, y)$ નું જીન–બિન્દુ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$f(x_0, y_0) = \max_{x} \min_{y} f(x, y) = \min_{y} \max_{y} f(x, y)$$

(બ) નીચેની 2×4 રમત આલેખની રીતે ઉકેલો : ૭

ખેલાડી–B

$$\textbf{ખેલાડી–A} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

(ક) પ્રાધાન્ય (Dominance) સિદ્ધાંતો વડે નીચેની રમત ઉકેલો : ૭

ખેલાડી–B

$$\textbf{ખેલાડી–A} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

૫ ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો : ૨૧

(અ) સમજાવો :

(૧) બહિર્મુખ વિધેય (Convex function)

(૨) લાગ્રાંજીય વિધેય (Lagrangian function)

(૩) વર્ગાત્મક આયોજન પ્રશ્ન (Quadratic Programming Problem)

(બ) કૂન–ટુકર પ્રમેયનું વિધાન લખો અને નીચેની વર્ગાત્મક આયોજન સમસ્યા માટે કૂન–ટુકર શરતો મેળવો :

મહત્તમ કરો : $Z = 2x_1 + x_2 - x_1^2$

જ્યાં $2x_1 + 3x_2 \le 6$

$2x_1 + x_2 \le 4$

તથા $x_1, x_2 \ge 0$

(ક) આલેખની રીતે નીચેની અસુરેખ આયોજન સમસ્યા ઉકેલો :

મહત્તમ કરો : $Z = 2x_1 + 3x_2$

જ્યાં $x_1^2 + x_2^2 \le 20$

$x_1 \cdot x_2 \le 8$

તથા $x_1, x_2 \ge 0$

(ડ) સમજાવો :

(૧) ઉપાડ–ખર્ચ (Carrying cost)

(૨) નોંધણી ખર્ચ (Ordering cost)

તથા પ્રચલિત સંકેતોમાં

$TIC^* = \sqrt{2D\,C_p C_h}$ તારવો.

(ઇ) કોઈ એક ઉત્પાદક પેઢી તેના યંત્રની વાર્ષિક જરૂરિયાત માટે 9000 પૂર્જાઓની ખરીદી એકી સાથે માસિક નોંધણી વડે કરે છે. દરેક પૂર્જાની કિંમત રૂ. 20 છે. દરેક નોંધણીએ નોંધણી ખર્ચ રૂ. 15 અને ઉપાડ ખર્ચ એ વાર્ષિક સરાસરી ઈન્વેન્ટરીના 15% છે.

ઈષ્ટતમ નોંધણી જથ્થો Q^*

અને ન્યૂનતમ વાર્ષિક કુલ ઈન્વેન્ટરી–વધારા ખર્ચ TIC^* ની ગણતરી કરો.

ENGLISH VERSION

1 – Operations Research

Instructions : (1) All questions are **compulsory**.

(2) Figures to the **right** indicate marks of the corresponding question.

(3) Notations are usual, where not mentioned.

(4) Write the correct number of the question in your answer book as shown in the question paper.

1 (a) Define : **6**

(1) Convex set

(2) Basic feasible solution

(3) Vertex of the convex set.

(b) If S_F is the set of all feasible solutions of a linear programming problem and if $S_F \neq \phi$, then prove that S_F must be a convex set. **7**

(c) Use the graphical method to solve the following L.P. problem : **8**

Maximize : $Z = 3x_1 + 2x_2$

Subject to $-2x_1 + x_2 \leq 1$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 2$$

and $x_1, x_2 \geq 0$

OR

1 (a) Define : **4**

(1) Degenerate basic solution

(2) Optimum solution.

(b) Use the simplex method to solve the following L. P. problem : **8**

Minimize : $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6$

Subject to $-8x_1 - 3x_2 + 12x_3 + x_4 = 3$

$$x_1 + x_4 + 6x_6 = 9$$

$$4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5$$

and $x_i \geq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots\ldots, 6.$

(c) Use the Big–M method to solve the following L.P. Problem : **9**

Maximize : $Z = 6x_1 + 4x_2$

Subject to $2x_1 + 3x_2 \leq 30$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

and $x_1, x_2 \geq 0$

2 (a) When a L.P. problem is said to be in a standard primal form ? Define the dual of such a problem. Also prove that the dual of the dual is the primal. **10**

(b) Use the principle of duality to solve the following L.P. problem **11**

Minimize : $Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3$

Subject to $x_1 + x_3 \geq 2$

$x_2 + x_3 \geq 5$

and $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

OR

2 (a) Explain the cutting plane method for solving an integer linear programming problem. **10**

(b) Solve the following integer linear programming problem using the cutting plane method : **11**

Maximize : $Z = 4x_1 + 3x_2$

subject to $x_1 + 2x_2 \leq 4$

$2x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$ and are integers

3 (a) Attempt any **two** : **10**

(1) Give a mathematical representation of a transportation problem.

(2) Explain the difference between a transportation problem and an assignment problem.

(3) Describe the method for solving an assignment problem.

(b) Find the optimum solution of the following transportation problem : **11**

	D_1	D_2	D_3	*Supply*
O_1	2	7	4	5
O_2	3	3	1	8
O_3	5	4	7	7
O_4	1	6	2	14
Demand	7	9	18	34

OR

(b) Find the minimum cost solution for 5×5 assignment problem whose cost coefficients are given as under :

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*
A	16	18	20	17	19
B	18	20	22	19	22
C	17	18	17	22	19
D	17	17	16	17	16
E	20	18	19	17	20

4 (a) Define : **6**

(1) Zero–sum game

(2) Mixed strategy

(3) Symmetric game.

(b) Prove that the symmetric game has value zero. **8**

(c) Transform the following game into an equivalent L.P. problem (solution is not required) : **7**

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{Player–B} \\
 & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\
\textbf{Player–A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

OR

4 (a) Let the function $f(x, y)$ be such that both $\max_{x} \min_{y} f(x, y)$ and $\min_{y} \max_{x} f(x, y)$ exist. If (x_0, y_0) is a saddle point of $f(x, y)$ then prove that **7**

$$f(x_0, y_0) = \max_{x} \min_{y} f(x, y) = \min_{y} \max_{x} f(x, y)$$

(b) Solve the following 2×4 game graphically : **7**

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{Player–B} \\
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\textbf{Player–A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(c) Using principles of dominance solve the following game : **7**

$$
\begin{array}{cc}
 & \textbf{Player–B} \\
 & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\textbf{Player–A} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 5 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

5 Attempt any **three** : **21**

(a) Explain :

(1) Convex function

(2) Lagrangian function

(3) Quadratic Programming Problem.

(b) State the Kuhn–Tucker theorem and derive the Kuhn–Tucker conditions for the following quadratic programming problem :

Maximize : $Z = 2x_1 + x_2 - x_1^2$

Subject to $2x_1 + 3x_2 \le 6$

$2x_1 + x_2 \le 4$

and $x_1, x_2 \ge 0$

(c) Solve the following nonlinear programming problem graphically :

Maximize : $Z = 2x_1 + 3x_2$

Subject to $x_1^2 + x_2^2 \le 20$

$x_1 \cdot x_2 \le 8$

and $x_1, x_2 \ge 0$

(d) Explain :

(1) Carrying (Holding) cost

(2) Ordering cost.

And in usual notations derive

$TIC^* = \sqrt{2D\,C_p C_h}$

(e) A manufacturing company purchases 9000 parts of a machine for its annual requirements, ordering one month's requirement at a time. Each part costs Rs. 20. The ordering cost per order is Rs. 15 and the carrying cost is 15% of the average inventory per year

Calculate :

(1) Optimal lot size Q*

(2) Minimum yearly total incremental inventory cost TIC*.

2 - Mechanics

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

(૨) પ્રત્યેક પ્રશ્નના ગુણ **૨૧** છે.

(૩) **જમણી** બાજુના અંક સંબંધિત પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

૧ (અ) P અને Q મહત્ત્વનાં બે બળો એક કણ ઉપર એકબીજા સાથે θ ખૂણે કાર્ય કરે છે. તેમનું પરિણામી બળ R, P સાથે α ખૂણે કાર્ય કરતું હોય તો સાબિત કરો કે ૭

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta \quad \text{અને} \quad \tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

અથવા

(અ) એક સમતલમાં દૃઢ પદાર્થના અતિ અલ્પ સ્થાનાંતર માટેનું પરિણામ પ્રચલિત સંકેતમાં, $\delta w = X\,\delta a + Y\,\delta b + N\,\delta\theta$ તેમ સાબિત કરો. ૭

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ આપો : ૧૪

(૧) છ બળોની અસર નીચે એક કણ સમતુલામાં છે. આમાંના ત્રણ બળોને ઉલટાવવામાં આવે છે તો પણ કણ સમતુલામાં રહે છે. સાબિત કરો કે જો આ ત્રણ બળોને દૂર કરવામાં આવે તો પણ તે સમતુલામાં રહેશે.

(૨) એક ભાર રહિત $2b$ લંબાઈના દૃઢ દંડને બે છેડે w_1 અને w_2 વજનના કણો લટકાવેલા છે. જેની ધાર ક્ષૈતિજ રહે તેવા a ત્રિજ્યાવાળા અર્ધ ગોલકમાં દંડ મૂકવામાં આવ્યો છે, જો w_1, વજનનો કણ ધારની નીચે સ્થિર રહે તો સાબિત કરો કે

$$w_1a^2 = w_2(b^2 - a^2)$$

(૩) ત્રણ બળોની અસરથી એક કણ સંસ્થિતિમાં છે, કાટખૂણે કાર્ય કરતાં બે બળોમાંનું એક બળથી બીજા બળ ત્રણ ગણુ છે. ત્રીજા બળનું માન 10 પાઉન્ડ હોય તો બાકીના બે બળોનાં માન શોધો.

(૪) જો $V = 2xz^4 - x^2y$ હોય તો (2, –2, –1) બિંદુએ $Grad\ V$ અને $|Grad V|$ શોધો.

૨ (અ) પોતાના વજન હેઠળ મુક્ત રીતે લટકતા સમાંગ કેબલ વડે રચાતા વક્રનું કાર્ટેઝીયન સમીકરણ મેળવો. ૭

અથવા

(અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં દર્શાવો કે ખરબચડા વક્ર સાથે સ્પર્શમાં રહેલ હળવા કેબલનો તણાવ $T = T_0 e^{\mu\theta}$ છે. ૭

(બ) કોઈ પણ **બે**ના ઉત્તર આપો : ૧૪

(૧) સાબિત કરો કે a ત્રિજ્યાના અર્ધવર્તુળાકાર પ્લેટના કેન્દ્ર અને દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર $\frac{4a}{3\pi}$ છે.

(૨) લીસી દીવાલ અને ખરબચડી જમીનની વચ્ચે એક સીડીને ટેકવવામાં આવે છે. તે સીડી પર એક માણસ ચડે છે. તો સીડી લપશે તે પહેલાં તે માણસ કેટલી સીડી ચઢી શકશે ?

(૩) સરખી ઊંચાઈના બે બિંદુઓ વચ્ચે એક 30 મીટર વાયર લટકે છે. તેની મહત્તમ ઊંડાઈ 3 મીટર છે. વાયરનું વજન 10 કિલોગ્રામ તે તેની લંબાઈ ઉપર એક સરખુ વહેંચાયેલ છે. તો વાયરમાં મહત્તમ તણાવ શોધો.

૩ (અ) એક સમતલમાં ગતિ કરતા કણના ક્ષેત્ર અને પ્રવેગના સ્પર્શીય અને અભિલંબીય ઘટકો મેળવો. ૭

અથવા

(અ) કણ સંહતિ માટે, ગતિશક્તિમાં વધારો, બળે કરેલા કાર્ય બરાબર હોય છે તેમ સાબિત કરો. આ પરથી શક્તિ સંરક્ષણનો નિયમ તારવો. ૭

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ આપો : ૧૪

(૧) બરફ પર સરકનાર, સ્થિર સ્થિતિમાંથી શરૂ કરીને, 280 મીટર લાંબા, સમક્ષિતિજ સાથે $\sin^{-1}\frac{5}{14}$ ખૂણે નમેલી ઢાળ પર, નીચે તરફ સરકી આવે છે. જો સરકનાર અને બરફ વચ્ચે ઘર્ષણાંક $\frac{1}{\sqrt{19}}$ હોય તો ઢાળના તળિયે સરકનારની ઝડપ શોધો.

(૨) એક નિશ્ચિત ઉદ્‌ગમબિંદુમાંથી દોરેલા સદિશ ત્રિજ્યાની દિશામાં અને તેને લંબ દિશામાં વેગના ઘટકો λr^2 અને $\mu\theta^2$ છે. કણના પ્રવેગના અરીય અને અનુપ્રસ્થ ઘટકોને r અને θમાં અભિવ્યક્ત કરો.

(૩) એક વક્રમાં ગતિ કરતા કણના સ્પર્શીય અને અભિલંબીય પ્રવેગના ઘટકો સરખા માપના છે. જો વક્રના સ્પર્શકનો કોણીય વેગ અચળ હોય તો તે વક્રનું સમીકરણ શોધો.

૪ (અ) પ્રચલિત સંકેતોમાં $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u = \dfrac{P}{h^2u^2}$ સાબિત કરો. ૭

અથવા

(અ) ક્ષૈતિજ સાથે α ખૂણો બનાવતા માર્ગ પર એક કણને V વેગથી ફેંકવામાં આવે છે. કણના : ૭

(૧) ક્ષૈતિજ વિસ્તાર

(૨) ઉડ્ડયનનો સમય તથા

(૩) મહત્તમ ઊંચાઈનાં સૂત્રો મેળવો.

(બ) ગમે તે **બે** પ્રશ્નોના જવાબ આપો : ૧૪

(૧) એક કણની કેન્દ્રિય કક્ષા $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ છે. તેનું બળ કેન્દ્ર ધ્રુવ છે. સાબિત કરો કે બળનો નિયમ r^7ના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં ચલે છે.

(૨) સમતલ સપાટીથી h ઊંચાઈએ આવેલી એક ટેકરી ઉપર એક બંદૂક ગોઠવેલી છે, બંદૂકને જો θ ખૂણે ફોડવામાં આવે અને તેનો પ્રક્ષેપ વેગ V હોય તો તે મહત્તમ ક્ષૈતિજ અંતર કાપે છે. સાબિત કરો કે

$$\operatorname{cosec}^2\theta = 2\left(1 + \frac{gh}{V^2}\right)$$ (હવાનો અવરોધ અવગણાનો)

(૩) એક કણ સાદી સ્તરિત ગતિ કરે છે. આ ગતિ એવી હોય છે કે કણની બે જુદી જુદી સ્થિતિઓ માટે વેગ u અને v તેમજ પ્રવેગ α અને β હોય છે. સાબિત કરો કે આ બંને સ્થિતિઓ વચ્ચેનું અંતર $\dfrac{v^2-u^2}{\alpha+\beta}$ છે. એમ પણ સાબિત કરો કે ગતિનો કંપવિસ્તાર

$$\frac{\left[(v^2-u^2)(\alpha^2 v^2-\beta^2 u^2)\right]^{1/2}}{\beta^2-\alpha^2}$$ છે.

૫ (અ) m દ્રવ્યમાન અને r ત્રિજ્યાવાળો ઘન નળાકાર, α ખૂણે નમેલા ઢાળ ઉપર ગબડે છે. સાબિત કરો કે તેનો પ્રવેગ $\dfrac{2}{3}\ g\sin\alpha$ છે. ૭

અથવા

(અ) m_1 અને m_2 દ્રવ્યમાનના એક જ સુરેખામાં u_1 અને u_2 વેગથી ગતિ કરતા બે ગોલકો અથડાય છે. જો તેમનો પ્રત્યવસ્થાનાંક હોય તો અથડામણ પછીના તેમના વેગ મેળવો. ૭

(બ) ગમે તે **બે** પ્રશ્નોના જવાબ લખો : ૧૪

(૧) a ત્રિજ્યાવાળા અને m દ્રવ્યમાનના ઘન ગોલકનું કોઈ એક વ્યાસને સાપેક્ષ જડત્વભ્રામક શોધો.

(૨) એક ગોલક, બીજા સ્થિર સમાન ગોલક સાથે સીધો અથડાય છે. આઘાત પછીના તેમના વેગ $\dfrac{1-e}{1+e}$ના ગુણોત્તરમાં હોય તેમ સાબિત કરો. જ્યાં e, પ્રત્યવસ્થાનાંક છે.

(૩) M દ્રવ્યમાનનો એક દૃઢપદાર્થ હળવા દોરાના એક છેડે બાંધેલો છે. ક્ષૈતિજ અક્ષને સાપેક્ષ પરિભ્રમણ કરી શકે તેવા a ત્રિજ્યાની સિલિન્ડર આકારની ફરકડી આસપાસ આ દોરો વીંટાળેલો છે. સાબિત કરો કે આ દૃઢ પદાર્થ $\dfrac{g}{1+\dfrac{I}{Ma^2}}$ પ્રવેગથી નીચે ઉતરે છે. I તેના અક્ષ વિષે સિલિન્ડર આકારની ફરકડીનું જડત્વ ભ્રામક છે.

ENGLISH VERSION

2 - Mechanics

Instructions : (1) Attempt any **five** questions.

(2) Each question carries **21** marks.

(3) Figures to the **right** indicate **full** marks of the corresponding question.

1 (a) If two forces P and Q act on a particle, at an inclination θ to each other and inclination between their resultant R and force P is α then prove that **7**

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\cos\theta \quad \text{and} \quad \tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

OR

(a) Prove in the usual notations that for an infinitesimal displacement of a rigid body in a plane **7**

$\delta w = X\,\delta a + Y\,\delta b + N\,\delta\theta$.

(b) Attempt any **two** : **14**

(1) A particle is equilibrium under the action of six forces. Three of these forces are reversed, the particle remains in equilibrium. Prove that it will remain in equilibrium if these three forces are removed altogether.

(2) A light rods of length $2b$, terminated by heavy particles of weight w_1 and w_2 is placed inside a smooth hemisphere bowl of radius a which is fixed with its rim horizontal. If the particle of w_1 rests just below the rim of bowl then prove that

$$w_1 a^2 = w_2 \left(b^2 - a^2\right).$$

(3) A particle is in equilibrium under three forces. Two of the forces act at right angles to one another, one being three times than the other. The third force has a 10 pound weight. Find the magnitude of the other two.

(4) Find grad V and $|grad\, V|$ at a point $(2, -2, -1)$ if $V = 2xz^4 - x^2 y$.

2 (a) Obtain the Cartesian equation of a curve formed by a uniform cable hanging freely under its own weight. **7**

OR

(a) In usual notations show that the tension is $T = T_0 e^{\mu\theta}$ if a light cable rests in contact with rough curve. **7**

(b) Attempt any **two** : **14**

(1) Prove that the distance between centre and the mass centre of a semicircular plat of radius a is $\frac{4a}{3\pi}$.

(2) A ladder is supported on a smooth floor and leans against a rough wall. How far, a man can climb up the ladder, without slipping taking place ?

(3) A suspension cable with supports the same level has a span of 30 meter and a maximum dip of 3 meter. The cable is loaded with a uniformly distributed load of 10 kilogram throughout its length. Find the maximum tension in the cable.

3 (a) Find the tangential and normal components of velocity and acceleration of the particle moving in a plane. **7**

OR

(a) For a system of particles, prove that the increase in kinetic energy is equal to the work done by force. From this deduce the principle of conservation of energy. **7**

(b) Attempt any **two** : **14**

(1) A skier, starting from rest, descends a slope 280 meter long and inclined at an angle of $\sin^{-1}\frac{5}{14}$ to the horizontal. If the coefficient of friction between the skier and the snow is $\frac{1}{\sqrt{19}}$, find the speed of the skier at the bottom of the slope.

(2) The components of velocity of a particle along the direction of a radius vector drawn from a fixed origin and perpendicular to it are respectively λr^2 and $\mu\theta^2$. Express radial and transverse components of its acceleration in terms of r and θ.

(3) The tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a curve are equal in magnitude. If the angular velocity of the tangent to the curve is constant then find the equation of the curve.

4 (a) In usual notations, prove : $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$. **7**

OR

(a) A particle is projected with velocity V, making an angle α with the horizontal. Find the expressions for **7**

(1) the horizontal range

(2) the time of flight and

(3) the maximum height attained by the particle.

(b) Attempt any **two** : **14**

(1) A particle describes the central orbit $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, the centre of force being the pole. Show that the law of force varies inversely as r^7.

(2) A gun is mounted on a will of height h above a level plain. Show that the greatest horizontal range for a given muzzle velocity V is obtained by firing at an angle of elevation θ such that

$\operatorname{cosec}^2 \theta = 2\left(1 + \frac{gh}{V^2}\right)$ (Neglecting resistance of air)

(3) A particle executes simple harmonic motion such that in two of its positions the velocities are u and v and corresponding accelerations are α and β. Show that the distance between the positions is $\frac{v^2 - u^2}{\alpha + \beta}$. Also show that the amplitude of the motion is $\frac{\left[\left(v^2 - u^2\right)\left(\alpha^2 v^2 - \beta^2 u^2\right)\right]^{1/2}}{\beta^2 - \alpha^2}$.

5 (a) A solid cylinder of radius r and mass m is rolling down a plane inclined at an angle α, prove that its acceleration is $\frac{2}{3} g \sin\alpha$. **7**

OR

(a) Two spheres of masses m_1 and m_2, moving in a straight line with velocities u_1 and u_2 collide with each other. If e is the coefficient of restitution, obtain their velocities after collision. **7**

(b) Attempt any **two** : **14**

(1) Find the moment of inertia of a solid sphere of mass m and radius a about its diameter.

(2) A sphere impinges directly on an equal sphere at rest. If the coefficient of restitution is e, show that their velocities after impact are in the ratio $\frac{1-e}{1+e}$.

(3) A rigid body of mass M is fastened to one end of a light thread, the thread is coiled round a windless in the form of circular cylinder of radius a which is left free to rotate about its axis. Prove that the rigid body descends with acceleration $\dfrac{g}{1+\dfrac{I}{Ma^2}}$ where I is the moment of inertia of the cylinder about its axis.

3 - Number Theory

સૂચના : (૧) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

(૨) જમણી બાજુના અંક અનુરૂપ પેટા-પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.

૧ (અ) p, $p+2$ અને $p+4$ ત્રણેય અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ હોય તેવા તમામ p શોધો. ૫

(બ) બંને શૂન્ય ન હોય તેવા પૂર્ણાંકો a, b આપેલા છે. સાબિત કરો કે એવા પૂર્ણાંકો x અને y અસ્તિત્વ ધરાવે છે કે જેથી $\gcd(a, b) = ax + by$. ૮

(ક) અંકગણિતનું મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૮

અથવા

૧ (અ) જો $n > 4$ વિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે $(n-1)!$ ને n વડે નિશેષ ભાગી શકાય છે. ૫

(બ) $4n+3$ સ્વરૂપની અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ અનંત છે તેમ બતાવો. ૮

(ક) ડાયોફેન્ટાઈન સમીકરણ $24X + 138Y = 18$ના તમામ પૂર્ણાંક ઉકેલો મેળવો. ૮

૨ (અ) $1! + 2! + 3! + \ldots\ldots + 99! + 100!$ને 12 વડે ભાગતાં મળતી શેષ શોધો. ૬

(બ) સાબિત કરો કે સુરેખ સમશેષતા સમીકરણ $ax \equiv b \pmod{n}$ને ઉકેલ હોય તો અને તો જ d / b, જ્યાં $d = \gcd(a, n)$. ૯

જો d / b તો તે d જેટલા પરસ્પર અસમશેષ મોડ્યુલો n ઉકેલો છે.

(ક) જો $7 \times a$ હોય તો સાબિત કરો કે a^3+1 અથવા a^3-1ને 7 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય. ૬

અથવા

૨ (અ) જો p અને q ભિન્ન અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ એવી છે કે જેથી ૬

$a^p \equiv a \pmod{q}$ અને $a^q \equiv a \pmod{p}$ થાય. સાબિત કરો કે

$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

(બ) જો p અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો બતાવો કે : $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. ૯

(ક) સુરેખ સમશેષ સમીકરણ $9x \equiv 21 \pmod{30}$ને ઉકેલો. ૬

૩ (અ) $\Im(n)$ અને $\sigma(n)$ વ્યાખ્યાયિત કરો. ૯

જો $n = p_1^{k_1}\ p_1^{k_2} \ldots\ldots p_r^{k_r}$ એ $n > 1$નું અવિભાજ્ય ઘાત અવયવીકરણ હોય તો સાબિત કરો કે :

$\Im(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_r+1)$ અને

$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1}-1}{p_i-1}$. તારવો કે $\Im$ અને σ મલ્ટિપ્લિકેટિવ વિધેયો છે.

(બ) $n > 2$ માટે બતાવો કે $\phi(n)$ એ બેકી સંખ્યા છે. ૭

(ક) દરેક ધન પૂર્ણાંક n માટે બતાવો કે : ૫

$\mu(n) \cdot \mu(n+1) \cdot \mu(n+2) \cdot \mu(n+3) = 0$.

અથવા

૩ (અ) જો n અને r ધન પૂર્ણાંકો હોય, જ્યાં $1 \le r < n$ તો સાબિત કરો કે ૭

દ્વિપદી સહગુણક $\xi \varphi \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$ પણ એક પૂર્ણાંક છે.

(બ) મોબીયસ μ–વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો. ૭

સાબિત કરો કે તે મલ્ટિપ્લિકેટિવ વિધેય છે.

(ક) ધન પૂર્ણાંક n માટે બતાવો કે $\frac{\sqrt{n}}{2} \le \phi(n) \le n$. ૭

૪ (અ) જો પૂર્ણાંક aની કક્ષા k મોડ્યુલો n હોય અને $r > 0$ હોય તો સાબિત ૮

કરો કે a^rની કક્ષા $\frac{k}{\gcd(r,\ k)}$ મોડ્યુલો n છે.

(બ) સાબિત કરો કે 2 એ 19નું મૂળભૂત બીજ છે પણ 13નું નથી. ૭

(ક) ફર્મા સંખ્યા F_5ને 641 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય છે તેમ બતાવો. ૬

અથવા

૪ (અ) મર્સીન સંખ્યા M_{13} અવિભાજ્ય સંખ્યા છે તેમ બતાવો. ૬

(બ) જો $2^k - 1 (k > 1)$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે ૮

$n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ એ પૂર્ણસંખ્યા છે.

(ક) $k \ge 3$ માટે સાબિત કરો કે 2^kને કોઈ મૂળભૂત બીજ નથી. ૭

૫ (અ) ધારો કે p એ એકી અવિભાજ્ય સંખ્યા છે અને $\gcd(a,\ p) = 1$. ૭

સાબિત કરો કે a એ pનો વર્ગાત્મક અવશેષ હોય તો અને તો જ

$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ ·

(બ) જો p એ એકી અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે લેજેન્ડર સંકેત ૭

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 \ ; & \text{જો} \quad p \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 \ ; & \text{જો} \quad p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

(ક) જો $x,\ y,\ z$ એ પાયથોગોરીયન ત્રેલું એવું છે કે જેથી $z - y = 2$ થાય તો ૭

સાબિત કરો કે કોઈક $t > 1$ માટે $x = 2t,\ y = t^2 - 1,\ z = t^2 + 1$.

અથવા

૫ (અ) જો x, y, z એ મૂળભૂત પાયથાગોરીયન ત્રેલું હોય તો બતાવો કે $x + y$ ૭

અને $x - y$ કાંતો 1 અથવા 7 સમશેષ મોડ્યુલો 8 છે.

(બ) જો p એ એકી અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય અને પૂર્ણાંકો a અને b એ pને ૭

સાપેક્ષ અવિભાજ્ય હોય તો સાબિત કરો કે જો $a \equiv b \pmod p$ તો

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right).$$

(ક) સાબિત કરો કે 3 એ 23નો વર્ગાત્મક અવશેષ છે, પણ 31નો નથી. ૭

ENGLISH VERSION

3 - Number Theory

Instructions : (1) Follow the **usual** notations.

(2) Figures to the **right** indicate the marks of the corresponding sub-question.

1 (a) Find all p for which $p,\ p+2$ and $p+4$ all are primes. **5**

(b) Given integers a and b not both of which are zero. **8**
Prove that there exist integers x and y such that
$\gcd(a,\ b) = ax + by$.

(c) State and prove the fundamental theorem of arithmetic. **8**

OR

1 (a) Prove that if $n > 4$ is composite then n divides $(n-1)!$ **5**

(b) Prove that there are infinite number of primes of the form $4n+3$. **8**

(c) Determine all solution in the integers of the Diophantine equation $24X + 138Y = 18$. **8**

2 (a) Find the remainder when $1! + 2! + 3! + ... + 99! + 100!$ is divided by 12. **6**

(b) Show that the linear congruence $ax \equiv b \pmod{n}$ has a solution iff d / b, where $d = \gcd(a, n)$. **9**

If d / b, then show that it has d mutually incongruent solution modulo n.

(c) If $7 \times a$, prove that $a^3 + 1$ or $a^3 - 1$ is divisible by 7. **6**

OR

2 (a) If p and q are distinct primes such that **6**

$a^p \equiv a \pmod{q}$ and $a^q \equiv a \pmod{p}$. Prove that

$a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

(b) If p is a prime then prove that $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. **9**

(c) Solve the linear congruence $9x \equiv 21 \pmod{30}$. **6**

3 (a) Define $\Im(n)$, $\sigma(n)$. **9**

If $n = p_1^{k_1} p_1^{k_2} .... p_r^{k_r}$ is the prime power factorization of $n > 1$. Then prove that :

$\Im(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) ..... (k_r + 1)$ and

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{k_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

Deduce that $\Im$ and σ are multiplicative functions.

(b) For $n > 2$ prove that $\phi(n)$ is an even number. **7**

(c) For each positive integer n, show that $\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$. **5**

OR

3 (a) If n and r are positive integers with $1 \le r < n$, then prove that the binomial coefficient **7**

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\; r!}$$ is also an integer.

(b) Define the Mobius μ–function. Show that it is multiplicative function. **7**

(c) For a positive integer n, show that $\frac{\sqrt{n}}{2} \le \phi(n) \le n$. **7**

4 (a) If the integer a has order k modulo n and $r > 0$. **8**

Prove that a^r has order $\frac{k}{\gcd(r,\, k)}$ modulo n.

(b) Show that 2 is a primitive root of 19, but not of 17. **7**

(c) Show that the Fermat number F_5 is divisible by 641. **6**

OR

4 (a) Prove that the Mersenne number M_{13} is a prime. **6**

(b) If $2^k - 1$ is a prime $(k > 1)$, Then prove that **8**

$n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ is a perfect number.

(c) For $k \ge 3$ prove that the integer 2^k has no primitive roots. **7**

5 (a) Let p be an odd prime and $\gcd(a,\, p) = 1$. **7**

Prove that a is a quadratic residue of p iff

$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.

(b) If p is an odd prime then prove that the Legendre symbol **7**

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{if } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

(c) Prove that if $x,\ y,\ z$ is a primitive Pythagorean triples in which the difference $z - y = 2$, then $x = 2t,\ y = t^2 - 1$, $z = t^2 + 1$, for some $t > 1$. **7**

OR

5 (a) If $x,\ y,\ z$ is a primitive Pythagorean triple, prove that $x + y$ and $x - y$ are congrrent modulo 8 to either 1 or 7. **7**

(b) Let p be an odd prime and a and b be integers which are relatively prime to p. Prove that if $a \equiv b \pmod{p}$ then **7**

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right).$$

(c) Show that 3 is a quadratic residue of 23, but a non–residue of 31. **7**

4 - Pascal Programming

Instructions : (1) All questions are **compulsory**.

(2) Figures on the **right** indicate the marks of the question.

(3) Write correct number of the question in your answer book as shown in the question paper.

1 (a) Attempt any **three** : **18**

(1) If a:=–17 div 4; b:=–17 mod 4 c:=17 mod(–4) then what are the values of abs(trunc(a)), round(abs(c–b)) and round(abs(trunc(a+2b+c)))?

(2) Determine which of the following are valid numbers with proper reason. If a number is valid, specify whether it is integer or real :

0.521, +93e12, –5.83e–67, 1., 42–55, 12e2, 131073, 1.31572e5.

(b) For a given positive integer n, write a program to print the following digit pyramid of order n as follows. Print the output in the following manner : (assume that n< = 9).

```
        1
      1 2 1
    1 2 3 2 1
  1 2 3 4 3 2 1
1 2 3 4 5 4 3 2 1
```

(c) A given positive integer *n* is said to be perfect if the sum of all the positive divisors of *n* is equal to 2n. e.g. 6 is a perfect number 2(6)=1+2+3+6. Write a program that given positive integer is (i) prime (ii) perfect or not.

(d) Write a program (i) to exchange the values of the two variables using only two variables. Write a program (ii) to accept three numbers a, b and c (iii) to change the values of a, b and c (iv) to print the new values of a, b and c.

(e) Write a program to evaluate the following series correct to four decimal digits :

(1) $-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+......$

(2) $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+........,$ where $|x|>1.$

2 Attempt any **three** : **18**

(a) Write an algorithm and program to find an integer in the range 50 to 100 having the maximum number of divisors.

(b) Write a function subprogram to evaluate the factorial of a given non-negative integer n. Using this function subprogram write a program to evaluate the binomial coefficient $\binom{n}{r}$ for given non-negative integers n and r with $0 \le r \le n$.

(c) What will be the output of the following program segment ? (Select from the option with proper explanation.)

```
Procedure swap(name x, y : integer);
var z: integer;
being
z : = x;     x : = y;     y : = z;
end;
```

with respect to the above procedure of some main program what is the effect of the following ? a[1]=2, a[2]=5 and i=1 :

(1) What would be the effect of swap(a[i], i) ?

(i) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 2.

(ii) a[1] = 2, a[2] = 5 and i = 1.

(iii) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 1.

(iv) a[1] = 2, a[2] = 1 and i = 2.

(2) What would be the effect of swap(a[i], i) ?

(i) a[1] = 2, a[2] = 5 and i = 1.

(ii) a[1] = 1, a[2] = 1 and i = 2.

(iii) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 2.

(iv) a[1] = 2, a[2] = 1 and i = 2.

(3) What would be the effect of swap(a[i], i), if x, y in swap are variable parameters ?

(i) a[1] = 2, a[2] = 5 and i = 1.

(ii) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 2.

(iii) a[1] = 2, a[2] = 1 and i = 2.

(iv) a[1] = 1, a[2] = 2 and i = 1.

(4) What would be the effect of swap(a[i], i), if x, y in swap are value parameters ?

(i) a[1] = 2, a[2] = 2 and i = 5.

(ii) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 1.

(iii) a[1] = 2, a[2] = 5 and i = 1.

(iv) a[1] = 1, a[2] = 2 and i = 1.

(5) What would be the effect of swap(a[i], i), if x, y in swap are value-result parameters ?

(i) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 1.

(ii) a[1] = 1, a[2] = 5 and i = 2.

(iii) a[1] = 2, a[2] = 1 and i = 2.

(iv) a[1] = 2, a[2] = 1 and i = 1.

(d) Explain the control structures WHILE-DO, REPEAT-UNTIL, FOR-TO, FOR-DOWNTO. Use the four structures to find the summation of the first n positive integers, where n is a given positive integer.

(e) Answer as ***true*** or ***false*** :

(i) Pascal does not allow the use of lower case letters.

(ii) The ordinal numbers of the Boolean constants true and false are identical.

(iii) Extremely small numbers cannot be written in the exponent form.

(iv) Blanks are allowed in an identifier.

(v) Pascal does not allow the use of any other data type except scalar.

(vi) Constant declaration may follow the variable declaration.

3 Attempt any **three** : **18**

(a) In the context of :

var b:array[1..n,1..n] of integer; i, j: integer;

The following code segment;

```
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to n do
b[i, j]: = (i div j) * (j div i);
```

Is equivalent to :

(x)
```
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to n do
b[i, j]: = 1;
```

(y)
```
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to n do
b[i, j]: = 0;
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to i do
b[i, j]: = 1;
```

(z)
```
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to n do
b[i, j]: = 0;
for i: = 1 to n do
b [i, i]: = 1;
```

(w)
```
for i: = 1 to n do
for j: = 1 to n do
b[i, j]: = 0;
```

(b) Write an algorithm and a program to read array *A* and *B* of integers and create a new array *C* such that element of *A* and *B* are alternatively found in *C*.

(c) Given a randomly ordered set of n numbers sort them into descending order using an insertion method.

(d) Write an algorithm or program to remove all duplicates from an ordered array and contract the array accordingly.

(e) Design an algorithm to find the number of times the maximum occurs in an array of n elements. Only one pass through the array should be made.

4 Attempt any **two** : **16**

(a) Explain : Static variables, dynamic variables, advantages and disadvantages of the pointer data type variables with proper examples.

(b) Design and implement a recursive algorithm to solve the Towers of Hanoi problem for one or more disks.

(c) Write an algorithm and program using recursive approach to find the GCD for two positive integers and to find the factorial of a positive integer.

(d) Design and implement a recursive quicksort algorithm to sort an array of integers.

(e) Design and implement procedures that maintain a queue that can be subjected to insertion and deletions.