NC - 583
Seat No.__________

Third Year B. Sc. / B. A. Examination

April / May – 2003

Mathematics : Paper - VIII

(Analysis - II)

(New Course)

Time : **3** Hours] [Total Marks : **105**

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નો **ફરજિયાત** છે.

(૨) **જમણી** બાજુના **અંક** સંબંધિત પ્રશ્નના **ગુણ** દર્શાવે છે.

(૩) પ્રશ્નપત્રમાં જણાવ્યા પ્રમાણેનો પ્રશ્નનો સાચો ક્રમ ઉત્તરવહીમાં લખો.

૧ (અ) સાબિત કરો કે શ્રેણી (x_n); $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ અભિસારી છે. ૭

(બ) જો $\sum a_n$ નિરપેક્ષ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\sum a_n$ નાં પદોની કોઈ પણ પુનઃગોઠવણી માટે તેનો સરવાળો એ જ રહે છે. (બદલાતો નથી). ૭

(ક) ધારો કે $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ માટે, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ અને $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. ૭

સાબિત કરો કે શ્રેણી (r_n) અભિસારી છે અને $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

અથવા

૧ (અ) સાબિત કરો : ૭

(૧) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0;\quad x > 1;\quad p \in \mathbb{R}$

(૨) $\sum \frac{a_n}{1+n a_n}$ અપસારી છે, $a_n > 0$ જ્યાં $\sum a_n$ અપસારી છે.

(બ) ધારો કે $a_n \geq a_{n+1} > 0$. સાબિત કરો કે $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ અભિસારી હોય તો અને ૭

તો જ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. આનો ઉપયોગ કરી $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ ની અભિસારીતા

ચર્ચો.

(ક) ધારો કે $a_n > 0$; પ્રત્યેક n માટે સાબિત કરો ૭

$$\underline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq \underline{\lim}\, a_n^{1/n} \leq \overline{\lim}\, a_n^{1/n} \leq \overline{\lim} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$$

વધુમાં યોગ્ય ઉદાહરણ આપી, દર્શાવો કે શ્રેઢીની અભિસારીતા ચકાસવા માટે ઘાત કસોટી એ ગુણોત્તર કસોટી કરતાં વધુ અસરકારક છે.

૨ (અ) જો શ્રેણી (f_n) એ $E \subset C$ પર સતત વિધેયોની શ્રેણી હોય અને ૭

$f_n \to f$, E પર એકરૂપ (એકસૂત્રી) અભિસરણ કરે તો બતાવો કે વિધેય f એ E પર સતત છે.

(બ) ગમે તે **બે** ગણો : ૭+૭

(૧) સાબિત કરો કે શ્રેણી $\{f_n(x)\}$;

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}; \quad x \in [0,\ 1] \text{ એ}$$

$[0,\ 1]$ પર એકરૂપ સીમિત છે પરંતુ એકરૂપ અભિસારી નથી.

(૨) $f_n(x) = n x e^{-nx^2}$ **અથવા** $f_n(x) = n^2 x(1-x^n)$;

$x \in [0,\ 1]$ની એકરૂપ અભિસારીતા ચકાસો. વધુમાં બતાવો કે

$\sum_{k=1}^{\infty} (x \cdot e^{-x})^k$ એ $[0,\ 2]$ પર એકરૂપ અભિસારી છે.

(૩) બતાવો કે શ્રેણી $\{f_n(x)\}$, જ્યાં $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$; $\forall\ x \in [-1, 1]$ એકસૂત્રી અભિસરણ કરે છે અને લક્ષવિધેય વિકલનીય છે પણ $x \in [-1, 1]$ પર સંબંધ $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ સાચો પડતો નથી.

૩ (અ) ધારો કે વિધેય $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ સતત છે. સાબિત કરો કે બર્નસ્ટિન બહુપદીઓ $B_n f$ ની શ્રેણી મળે કે જેથી $B_n f \to f : [0, 1]$ એકરૂપ છે. ૭

અથવા

(અ) $|x| < 1;\ \alpha \in \mathbb{R}$ માટે બતાવો કે ૭

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots\ldots$$

જ્યાં $\binom{\alpha}{0} = 1;\ \binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-k+1)}{k!};\quad k \in \mathbb{N}$.

(બ) ગમે તે **બે** ગણો : ૭+૭

(૧) સાબિત કરો : $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - x^{11} + \ldots\ldots$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા 1 છે અને $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \dfrac{2}{3}$.

(૨) $f(x) = \tan^{-1} x;\quad x \in [0, 1]$ માટે બર્નસ્ટિન બહુપદીઓ $B_1 f$, $B_2 f$ અને $B_3 f$ મેળવો.

(૩) બતાવો કે વિધેય $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ ને ઉગમબિંદુ આગળ કોઈ પણ કક્ષાના વિકલિતો છે અને $f^{(n)}(0) = 0$, પ્રત્યેક $n \in \mathbb{N}$ પરંતુ $f(x)$ને ટેઈલરનું વિસ્તરણ નથી.

૪ (અ) ધારો કે $\mathbb{R}^n$ પરના તમામ વ્યસ્ત સંપન્ન સુરેખ કારકોનો ગણ Ω છે. ૭
જો $A \in \Omega;\ B \in L(\mathbb{R}^n)$ અને $\|A - B\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ હોય તો સાબિત કરો કે $B \in \Omega$. તારવો કે $L(\mathbb{R}^n)$નો ઉપગણ Ω વિવૃત્ત ગણ છે.

(બ) ગમે તે **બે** ગણો : ૭+૭

(૧) વિધેય $\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ના પૂર્ણ વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

તથા $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ માટે $\|A^{-1}\|$ શોધો.

(૨) ધારો કે $\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ વિધેય છે. અને E વિવૃત્ત ગણ છે. જો તમામ આંશિક વિકલિતો $D_j f_i$નું અસ્તિત્વ હોય અને E પર સતત હોય તો સાબિત કરો કે $\bar{f} \in \tau'(E)$. જ્યાં $1 \le i \le m;\ 1 \le j \le n$.

(૩) સદિશ વિધેયોના પૂર્ણ વિકલિતો માટે "સાંકળનો નિયમ" (Chain Rule) લખો અને સાબિત કરો.

(૪) બતાવો કે $|\bar{x}|$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ એ $\bar{x} = \bar{0}$ આગળ વિકલનીય નથી. વધુમાં પ્રચલિત સંકેતો મુજબ સાબિત કરો કે

$$\nabla f g = f \, \nabla g + g \, \nabla f .$$

૫ ગમે તે **ત્રણ** ગણો :

(અ) વ્યાખ્યા આપો : વૈશ્લેષિક વિધેય, સ્વરિત વિધેય. વિધેય $y^3 - 3x^2 y$નું સ્વરિત અનુબદ્ધ વિધેય મેળવો તથા અનુરૂપ વૈશ્લેષિક વિધેય પણ શોધો. ૭

(બ) જો $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ એ $D - \{(0, 0)\}$માં વૈશ્લેષિક હોય તો બતાવો કે $r^2 \cdot u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$ તથા $f(z) = \log z$નું ધ્રુવીય સ્વરૂપ પ્રમાણે $f'(z)$ મેળવો. ૭

(ક) વૈશ્લેષિક વિધેયના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી બતાવો કે વક્રો $x^2 - y^2 = 5$ અને $xy = 6$ લંબચ્છેદી છે. તથા વિધેય $w = 2z^3 - 9z^2 + 12z + 7$ અનુકોણીય ના હોય તે બિંદુઓ શોધો. ૭

(ડ) સાબિત કરો : વિધેય $w = z^2$નાં રૂપાંતર હેઠળ રેખાઓ $y = 2x$ અને $y = x - 1$ વચ્ચેના ખૂણાનું માપ અને દિશા સમાન રહે છે. ૭

(ઈ) $f(z) = \dfrac{z+i}{1+iz}$નું પ્રતિવિધેય શોધો. (અસ્તિત્વ હોય તો). તથા $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$નાં પ્રતિબિંબ બિંદુઓ અનુક્રમે $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$ હોય તેવું દ્વિસુરેખ આલેખન શોધો. ૭

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) All questions are **compulsory**.
(2) Figures to the **right** indicate marks of the corresponding question.
(3) Write the correct number of the question.

1 (a) Prove that (x_n); $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ is convergent. **7**

(b) If $\sum a_n$ in absolutely convergent then prove that any rearrangement of $\sum a_n$ has the same sum. **7**

(c) Let $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ write $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$. **7**

Prove that the sequence (r_n) is convergent and

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

OR

1 (a) Prove : **7**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^p}{x^n} = 0; \quad x > 1; \quad p \in |\mathbb{R}|$

(2) $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$ in divergent; $a_n > 0$ whenever $\sum a_n$ is divergent.

(b) Let $a_n \geq a_{n+1} > 0$. Prove that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if and only **7**

if $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_2 k$ converges. Using this discuss the conver-

gence of $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$.

(c) Let $a_n > 0$; for all n. Then prove that **7**

$$\underline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \le \underline{\lim}\, a_n^{1/n} \le \overline{\lim}\, a_n^{1/n} \le \overline{\lim}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Also giving suitable example; explain that root test is more effective than ratio test, to test the convergence of the series.

2 (a) Let (f_n) be a sequence of continuous functions on $E \subset C$ converging uniformly to f on E. Then prove that f is continuous on E. **7**

(b) Attempt any **two** : **7+7**

(1) Let $\{f_n(x)\}$; $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$; $x \in [0, 1]$. Prove that (f_n) is uniformly bounded but not uniformly convergent on $[0, 1]$.

(2) Discuss the uniform convergence of $f_n(x) = n x e^{-nx^2}$ **OR** $f_n(x) = n^2 x(1-x^n)$; $x \in [0, 1]$. Also show that $\sum_{k=1}^{\infty} (x \cdot e^{-x})^k$ is uniformly convergent in $[0, 2]$.

(3) Show that the sequence $\{f_n(x)\}$ where $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$; $\forall\ x \in [-1, 1]$ converges uniformly and that the limit function is differentiable, but the relation $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ does not hold good for all $|x| \le 1$.

3 (a) Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be continuous. Then prove that there exists a sequence of polynomials, the Bernstein polynomials $B_n f$ such that $B_n f \to f : [0, 1]$ uniformly on $[0, 1]$. **7**

OR

(a) Show that for $|x| < 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$ **7**

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots$$

where; $\binom{\alpha}{0} = 1$; $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$; $k \in \mathbb{N}$.

(b) Attempt any **two** : **7+7**

(1) Prove : $f(x) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - x^{11} + \ldots\ldots$ has radius of convergence 1 and that $\lim_{x \to 1-} f(x) = \frac{2}{3}$.

(2) Obtain Bernstein polynomials $B_1 f$, $B_2 f$ and $B_3 f$ for $f(x) = \tan^{-1} x$ on $x \in [0, 1]$.

(3) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

has derivatives of all orders at the origin and $f^{(n)}(0) = 0$; for all $n \in \mathbb{N}$; but it does not have a *Taylor* expansion.

4 (a) Let Ω be the set of all invertible linear operators on $\mathbb{R}^n$. Prove : If $A \in \Omega$ and $B \in L(\mathbb{R}^n)$ and $\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$ then $B \in \Omega$. Deduce that Ω is an open set on $L(\mathbb{R}^n)$. **7**

(b) Attempt any **two** : **7+7**

(1) Define total derivative of the function $\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. For $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ find $\|A^{-1}\|$.

(2) Suppose $\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is a function on an open set E; and the partial derivatives $D_j f_i$ exist and are continuous on E; $1 \le i \le m$; $1 \le j \le n$ then prove that $\bar{f} \in \tau'(E)$.

(3) State and prove "Chain Rule" for the total derivatives of the vector valued functions.

(4) Show that $|\bar{x}|$; $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ is not differentiable at $\bar{x} = \bar{0}$. Also, in the usual notations prove that

$$\nabla f\, g = f\, \nabla\, g + g\, \nabla\, f .$$

5 Attempt any **three** :

(a) Define : Analytic function, Harmonic function. Find harmonic conjugate of $y^3 - 3x^2 y$ and corresponding analytic function. **7**

(b) If $f(z) = u(r,\, \theta) + iv(r,\, \theta)$ is analytic in $D - \{(0,\, 0)\}$ then show that **7**

$r^2 u_{rr} + r\, u_r + u_{\theta\theta} = 0$. For $f(z) = \log z$ find $f'(z)$ in polar form.

(c) Using the property of analytic function show that the curves $x^2 - y^2 = 5$ and $xy = 6$ are orthogonal. Also find the non-conformal points of the mapping $w = 2z^3 - 9z^2 + 12z + 7$. **7**

(d) Prove : The magnitude and direction of an angle between the lines $y = 2x$ and $y = x - 1$ remain same under the image of the mapping $w = z^2$. **7**

(e) Find inverse of the mapping $f(z) = \dfrac{z+i}{1+iz}$ (if exists). **7**

Also find the bilinear transformation which maps the points $z_1 = \infty$, $z_2 = 1$, $z_3 = 0$ onto the points $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$.