NA-502

Seat No.________

First Year B. Sc. Examination

April / May – 2003

Mathematics : Paper – I

Time : Hours] [Total Marks :

સૂચના : (૧) બધા જ પ્રશ્નોના **જવાબ** લખો.
(૨) દરેક પ્રશ્નના ગુણ **સરખા** છે.

૧ (અ) જો $y = \sin(ax+b)$, a, b અચળ $a \neq 0$ તો સાબિત કરો કે

$$y_n = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in N.$$

(બ) જો $x+y=1$ તો સાબિત કરો કે $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n y^n\right) = n!$

$$\left\{y^n - (nc_1)^2 y^{n-1}x + (nc_2)^2 y^{n-2}x^2 + \ldots + \ldots + (-1)^n x^n\right\}.$$

(ક) જો $y = \tan^{-1} x$ હોય તો $y_n(0)$નું મૂલ્ય મેળવો.

અથવા

૧ (અ) જો $y = e^{ax}\sin(bx+c)$, a, b અચલ $a \neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx+c+n\phi) \quad \text{જ્યાં} \quad r = \sqrt{a^2+b^2},\ \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

(બ) $x^2 e^{3x}\cos x$ નું n મું વિકલન મેળવો.

(ક) જો $y = \frac{1}{1-x-x^2}$ હોય તો સાબિત કરો કે $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ જ્યાં

$$F_n = \frac{y_n(0)}{n!}$$

૨ (અ) વાસ્તવિક પદોની શ્રેઢી $\sum a_n$ ને અભિસારી ક્યારે કહેવાય ? જો વાસ્તવિક શ્રેઢી $\sum a_n$ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. આ પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય સાચો છે ? તમારા જવાબને અનુરૂપ એવું ઉદાહરણ આપો.

અથવા

(અ) ધન પદોવાળી અનંત શ્રેઢીઓ $\sum a_n$ અને $\sum b_n$ ના અભિસાર માટેની સરખામણી (તુલના)ની કસોટી લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **બે** ની અભિસારીતા ચર્ચો :

(૧) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n^2+1}+\ldots..$

(૨) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots..+\frac{1}{n!}+\ldots\ldots..$

(૩) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right).$

(ક) ઘાત શ્રેઢી $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}x^n$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

૩ (અ) રોલનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ આપો :

(૧) $f(x)=\log x$ અને $g(x)=\tan^{-1}x,\ x\in[1,2]$ લઈ બતાવો કે $\frac{\log 2}{\cot^{-1}3}$ ની કિંમત $\frac{3}{2}$ અને 3 વચ્ચે આવેલી છે.

(૨) $0<a<b$ માટે સાબિત કરો કે :

$$\frac{e}{e^{a/b}}<\frac{b}{a}<\frac{e^{b/a}}{e}$$

(૩) $\log\left(1+e^x\right)$ નું પ્રથમ ચાર પદ સુધી x ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(ક) સાબિત કરો :

$$\sin x\cos x=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5\ldots\ldots\ldots..$$

અથવા

(ક) $\sin x-\cos x$નું $x-\frac{\pi}{4}$ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

૪ ગમે તે **ત્રણ**ના જવાબ લખો :

(અ) *લ'પીટલ*નો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.

(બ) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{x}{x-1}\right),\ x\in R^+-\{1\}$ ની કિંમત મેળવો.

(ક) $\lim\limits_{x \to 0_+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$, $x > 0$ ની કિંમત મેળવો.

(ડ) વક્ર $y\left(3+x^2\right) = x^3$ના નતિબિંદુઓ શોધો.

(ઈ) વક્ર $y^2 = x^3$નું આલેખન ગુણધર્મો સાથે કરો.

૫ (અ) $I_n = \int \sin^n x \, dx$ હોય, તો સાબિત કરો કે

$$I_n = \frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{તે પરથી} \quad \int \sin^5 x \, dx$$

(બ) ગમે તે **બે**ના જવાબ આપો :

(૧) સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$ મેળવો.

(૨) a ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું વક્ર પૃષ્ઠફળ મેળવો.

(૩) ઉપવલય $16x^2 + 9y^2 = 144$ નું તેના પ્રધાનાક્ષ આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવવાથી રચાતી ઘનાકૃતિનું ઘનફળ શોધો.

(૪) નિયત સંકલનનો ઉપયોગ કરીને લક્ષ મેળવો :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right) \ldots\ldots \left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

૬ (અ) વિકલ સમીકરણ $y = x\, f(p) + g(p)$ના ઉકેલની રીત સમજાવો. જ્યાં $p = \frac{dy}{dx}$ છે.

(બ) આપેલ વિકલ સમીકરણો ઉકેલો :

(૧) $\left(x^2 - 2xy - y^2\right) dx - (x+y)^2 \, dy = 0$

(૨) $yp^2 = xp^3 + ap.$

(ક) આપેલ વિકલ સમીકરણ ઉકેલો :

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x^2}$$

અથવા

૬ (અ) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ ના ઉકેલની રીત સમજાવો. જ્યાં P અને Q એ xનાં વિધેયો છે.

(બ) કોઈ પણ **બે** ઉકેલો :

(૧) $\frac{dy}{dx}+yx=y^3x$ (૨) $p^2-(x+3y)\,p+2y(x+y)=0$

(૩) $y=2px+p\sqrt{x}$ (૪) $p^2-6p+8=0$

૭ (અ) જો $f(D)=(D-a)^r g(D)$ અને $g(a)\neq 0$ હોય તો સાબિત કરો કે

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^r g(D)}e^{ax}=\frac{e^{ax}}{g(a)}\cdot\frac{x^r}{r!}$$

અથવા

(અ) $\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{x}{2a}\sin ax$ સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **ત્રણ** ઉકેલો :

(૧) $(D^2+1)\,y=e^{3x}+\cos 3x$

(૨) $(x^2D^2-3x\,D+3)\,y=x^2\sin(\log x)$

(૩) $(D^2-1)\,y=x^3$

(૪) $(D^3+3D^2+3D+1)\,y=e^x$

(૫) $(D^4-1)\,y=e^x\cdot\cos x$.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) Attempt **all** questions.
(2) Each question carries **equal** marks.

1 (a) If $y = \sin(ax+b)$, a, b are constants $a \neq 0$ then prove that

$$y_n = a^n \sin\left(ax + b + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in N.$$

(b) If $x + y = 1$, then prove that $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n y^n\right) = n!$

$$\left\{y^n - (nc_1)^2 y^{n-1}x + (nc_2)^2 y^{n-2}x^2 + ... + ... + (-1)^n x^n\right\}.$$

(c) If $y = \tan^{-1} x$ then find the value of $y_n(0)$.

OR

1 (a) If $y = e^{ax}\sin(bx+c)$, $a, b \in R$ $a \neq 0$ then prove that.

$y_n = r^n e^{ax}\sin(bx + c + n\phi)$ where $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$.

(b) Obtain n[th] derivative of $x^2 e^{3x}\cos x$.

(c) If $y = \frac{1}{1 - x - x^2}$ then prove that $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ where

$$F_n = \frac{y_n(0)}{n!}$$

2 (a) When is a series $\sum a_n$ of real terms said to be convergent ? If a series $\sum a_n$ is convergent then prove that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Is the converse of this theorem true ? Give one example.

OR

(a) State and prove the comparison test for the convergence of the positive term infinite series $\sum a_n$ and $\sum b_n$.

(b) Discuss the convergence of any **two** :

(1) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+......+\frac{x}{n^2+1}+.....$

(2) $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+........+\frac{1}{n!}+........$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}\right)$

(c) Find the radius of convergence of the power series

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{4^n}x^n$$

3 (a) State and prove Rolle's theorem.

(b) Attempt any **two** :

(1) Taking $f(x)=\log x$, $g(x)=\tan^{-1}x$, $x\in[1,2]$. Show that the value of $\frac{\log 2}{\cot^{-1}3}$ lies between $\frac{3}{2}$ and 3

(2) If $0<a<b$ then show that

$$\frac{e}{e^{a/b}}<\frac{b}{a}<\frac{e^{b/a}}{e}$$

(3) Expand $\log\left(1+e^x\right)$ in power of x up to first four terms.

(c) Prove that :

$$\sin x\cos x=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5...........$$

OR

(c) Explain $\sin x-\cos x$ in power of $x-\frac{\pi}{4}$.

4 Attempt any **three** :

(a) State and prove L' Hospital's rule.

(b) Obtain the value of $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{x}{x-1}\right), x\in R^+-\{1\}$

(c) Obtain the values of $\lim\limits_{x \to 0_+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}, x > 0$

(d) Find the points of inflexion of the curve $y\left(3+x^2\right) = x^3$

(e) Sketch the group of the curve $y^2 = x^3$ with properties.

5 (a) If $I_n = \int \sin^n x\, dx$, then prove that

$$I_n = \frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$ and hence find $\int \sin^5 x\, dx$

(b) Attempt any **two** :

(1) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ as a limit of sum.

(2) Obtain the curved surface area of the sphere having radius a.

(3) Find the volume of the solid generated by the revolution of the ellipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ about its major axis.

(4) Evaluate the limit using definite integral :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

6 (a) Explain the method of solving a differential equation $y = x\, f(p) + g(p)$ where $p = \frac{dy}{dx}$.

(b) Solve the given differential equations :

(1) $\left(x^2 - 2xy - y^2\right) dx - (x+y)^2\, dy = 0$

(2) $yp^2 = xp^3 + ap$

(c) Solve the given differential equation

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

OR

6 (a) Explain the method of solving a differential equation $\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n$ where P and Q are functions of x.

(b) Solve : (any **two**)

(1) $\frac{dy}{dx}+yx=y^3x$ (2) $p^2-(x+3y)\,p+2y(x+y)=0$

(3) $y=2px+p\sqrt{x}$ (4) $p^2-6p+8=0$

7 (a) If $f(D)=(D-a)^r\,g(D)$ and if $g(a)\neq 0$ then prove that

$$\frac{1}{f(D)}\,e^{ax}=\frac{1}{(D-a)^r\,g(D)}\,e^{ax}=\frac{e^{ax}}{g(a)}\cdot\frac{x^r}{r!}$$

OR

(b) Prove : $\frac{1}{D^2+a^2}\cos ax=\frac{x}{2a}\sin ax$

(b) Solve : (any **three**)

(1) $\left(D^2+1\right)y=e^{3x}+\cos 3x$

(2) $\left(x^2D^2-3x\,D+3\right)y=x^2\,\sin(\log x)$

(3) $\left(D^2-1\right)y=x^3$

(4) $\left(D^3+3D^2+3D+1\right)y=e^x$

(5) $\left(D^4-1\right)y=e^x\cdot\cos x$