

FB-02
Mathematics Paper-II
(New Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks: 105

- સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ સાત પ્રશ્નો છે.
(2) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.
(3) દરેક પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (a) સહઅવયવજ (Adjoint) શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. જો $A = [a_{ij}]_n$ એ n -કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = |A| I_n$.

અથવા

- (a) શ્રેણિકના પરિવર્ત (Transpose) શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.
જો A એ $m \times n$ પ્રકારનો શ્રેણિક અને B એ $n \times p$ પ્રકારનો શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે
 $(AB)^T = B^T A^T$.

- (b) શ્રેણિકના કોટિની વ્યાખ્યા આપો.

શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

- (c) ગમે તે એક ગણો :

- (1) સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળારૂપે રજૂ કરો.

- (2) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોય તો A^{-1} શોધો.

2. (a) ચોરસ શ્રેણિક માટે લાક્ષણિક મૂલ્ય અને લાક્ષણિક સદિશની વ્યાખ્યા આપો.

શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ શોધો અને

$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I$ વડે નિરૂપણ પામતો શ્રેણિક શોધો.

(c) સમીકરણ સંહિત $5x + 3y + 7z = 4$

$$3x + 26y + 2z = 9$$

$$7x + 2y + 11z = 5$$
 નો કેમરનાં નિયમનો ઉપયોગ કરી ઉકેલ મેળવો.

અથવા

2. (a) કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સુરેખ સમીકરણ સંહિત

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$x + 4y + 9z = 6$ ની સુસંગતતા ચકાસો અને હાર સંક્ષિપ્ત સોપાનની રીતે તેનો ઉકેલ મેળવો.

(c) કેલી-હેમિલ્ટન પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ નો વ્યસ્ત શોધો.

3. (a) દ્વિવર્ગ સમીકરણ

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ને ઉકેલવાની ફેરારીની રીત સમજાવો.

અથવા

(a) ત્રિઘાત સમીકરણ

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ને ઉકેલવા માટેની કાર્ડનની રીત સમજાવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

(1) ફેરારીની રીતે $x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 104x + 96 = 0$ ઉકેલો.

(2) કાર્ડનની રીતે સમીકરણ $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$ ઉકેલો.

(3) જો α, β, γ એ સમીકરણ $x^3 - 12x + 16 = 0$ ના બીજ હોય તો નીચેના બીજવાળા સમીકરણો મેળવો.

(i) $(\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$ અને

(ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$.

4. (a) પ્રચલિત સંકેતો મુજબ R^2 માં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ મેળવો.

અથવા

- (a) a ત્રિજ્યાવાળા અને (δ, α) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. જો વર્તુળ ધ્રુવમાંથી પસાર થાય તો વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.
- (b) ગમે તે બે ગણો :
- (1) જો શાંકવની પરસ્પર લંબ નાભિજીવાઓ $P'SP'$ અને $Q'SQ'$ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{અચળ છે.}$
- (2) સમીકરણ $r = a \cos \theta + b \sin \theta$, a, b શૂન્યેત્તર અચલ, એ વર્તુળનું નિરૂપણ કરે છે તેમ બતાવો તેમજ તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.
- (3) જો R^3 માં કોઈ બિંદુના સિલિન્ડરીય યામ $(4, \frac{\pi}{4}, 4)$ હોય તો તેનાં કાર્તેઝીય અને ગોલીય યામ મેળવો.

5. (a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

- (a) સાબિત કરો કે R^3 માં સમતલ અને ગોલકનો સામાન્ય છેદ એક વર્તુળ છે.
- (b) ગમે તે બે ગણો :
- (1) 'a' ની કઈ કિંમત માટે સમતલ $x + y + z = a$, ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$ ને સ્પર્શે ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શબિંદુઓ થાય ?
- (2) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$ બહારથી સ્પર્શે છે.
- (3) વર્તુળ $\vec{r}^2 - 2\vec{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0$, $\vec{r} \cdot (1, 5, -7) = 45$ ના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા મેળવો.

6. (a) R^3 માં બિંદુ (α, β, γ) માંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જક રેખાઓ વાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

- (a) R^3 માં સુરેખા $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ જેનો અક્ષ હોય અને ત્રિજ્યા r હોય એવા સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

- (1) શિરોબિંદુ (α, β, γ) અને આધારવક $y^2 = 4ax, z = 0$ હોય એવા શંકુનું સમીકરણ મેળવો.
- (2) સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે, તેનાં શીર્ષ, અર્ધ શિર:કોણ અને અક્ષ મેળવો.
- (3) એક સમનળાકાર $(4, -5, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તેનો અક્ષ z -અક્ષને સમાંતર તથા બિંદુ $(5, -2, 6)$ માંથી પસાર થાય છે. આ સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

7. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

- (a) પરવલયજ $ax^2 + by^2 = 2z$ નાં તેની પરનાં બિંદુ (α, β, γ) આગળના સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

- (1) એકપૃષ્ઠી અતિવલયજ $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ ના સમતલ $20x + 4y - 21z = 19$ ને સમાંતર સ્પર્શતલો ના સમીકરણો અને તેમના સ્પર્શબિંદુઓ મેળવો.
- (2) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને બિંદુ A, B, C માં છેદે છે તો સાબિત કરો કે ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.
- (3) સાબિત કરો કે λ ની દરેક કિંમત માટે સમતલ

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2 \right) = 1,$$

$$\text{શાંકવજ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ને સ્પર્શે છે.}$$

Seat No. : _____

FB-02
Mathematics Paper-II
(New Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks: 105

- Instructions :** (1) There are seven questions.
(2) Attempt **all** questions.
(3) All questions carry equal marks.

1. (a) Define adjoint of a matrix. If $A = [a_{ij}]_n$ is a square matrix of order n , prove that $A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = |A| I_n$.

OR

- (a) Define Transpose of a matrix.
If A is $m \times n$ matrix and B is $n \times p$ matrix then prove that

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

- (b) Define rank of a matrix.

Find the rank of a matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

- (c) Attempt any **one** :

- (1) Define symmetric and skew-symmetric matrices.

Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew-symmetric matrices.

- (2) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, obtain A^{-1} .

2. (a) Define eigen value and eigen vector of a square matrix. Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (b) Obtain the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, and also find

the matrix represented by the expression

$$A^8 - 5A^7 + 7A^6 - 3A^5 + A^4 - 5A^3 + 8A^2 - 2A + I.$$

- (c) Using Cramer's rule, obtain the solution of the system of linear equations given by

$$5x + 3y + 7z = 4$$

$$3x + 26y + 2z = 9$$

$$7x + 2y + 11z = 5$$

OR

2. (a) State and prove Caley-Hamilton theorem.
(b) Discuss the consistency of the following system of linear equations, find its solution using row-reduction method.

$$x + y + z = 3$$

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$x + 4y + 9z = 6$$

- (c) Using Caley-Hamilton theorem find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

3. (a) Explain Ferrari's method to solve a Bi-Quadratic equation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

$$a, b, c, d, e \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

OR

- (a) Explain Cardon's method to solve cubic equation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0.$$

$$a, b, c, d \in \mathbf{R}, a \neq 0$$

- (b) Attempt any **two** :

- (1) Solve the equation $x^4 - 10x^3 + 44x^2 - 104x + 96 = 0$ using Ferrari's method.
(2) Solve the equation $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$ using Cardon's method.
(3) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - 12x + 16 = 0$ then obtain the equations whose roots are
(i) $(\alpha - \beta)^2, (\beta - \gamma)^2, (\gamma - \alpha)^2$ and
(ii) $\alpha(\beta + \gamma), \beta(\gamma + \alpha), \gamma(\alpha + \beta)$.

4. (a) In usual notations obtain the polar equation $\frac{1}{r} = 1 + e \cos \theta$ of a conic in R^2 .

OR

- (a) Obtain the polar equation of circle having centre at (δ, α) and radius 'a'. If circle passes through pole, then what is its equation ?
- (b) Attempt any **two** :
- (1) If $P'SP$ and $Q'SQ$ are mutually perpendicular focal chords of conic, then prove that $\frac{1}{SP \cdot SP'} + \frac{1}{SQ \cdot SQ'} = \text{constant}$.
- (2) Prove that the equation $r = a \cos \theta + b \sin \theta$ (a, b non-zero constants) represents a circle. Also find its centre and radius.
- (3) Find Cartesian and spherical co-ordinates of a point whose cylindrical co-ordinates are $(4, \frac{\pi}{4}, 4)$.
5. (a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3 .

OR

- (a) Prove that the intersection of sphere and plane is a circle.
- (b) Attempt any **two** :
- (1) For what value of 'a' the plane $x + y + z = a$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$? Obtain the point of contact.
- (2) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$ touch each other externally.
- (3) Find centre and radius of the circle $\bar{r}^2 - 2\bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0, \bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45$.

6. (a) Obtain the equation of an enveloping cone having generator touching a sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point (α, β, γ) in R^3 .

OR

- (a) Obtain the equation of right circular cylinder having axis $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and radius r in R^3 .

(b) Attempt any **two** :

- (1) Obtain the equation of a cone having vertex at (α, β, γ) and guiding curves $y^2 = 4ax, z = 0$.
- (2) Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right circular cone and also find its axis, the vertex and the semi-vertical angle.
- (3) If the axis of the right circular cylinder passing through $(4, -5, 3)$ is parallel to z -axis and passes through point $(5, -2, 6)$ then find the equation of right circular cylinder.

7. (a) Obtain the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also find point of their contact.

OR

(a) Obtain the equation of the tangent plane at point (α, β, γ) to the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$.

(b) Attempt any **two** :

- (1) Find the equation of the tangent plane and the point of contact to the hyperboloid $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ of one sheet parallel to the plane $20x + 4y - 21z = 19$.
- (2) If the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the coordinate axes in A, B, C then prove that the locus of centroid of ΔABC is $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$.
- (3) Prove that for all values of λ , the plane

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2 \right) = 1$$

touches the conicoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

FB-02
Mathematics Paper-II
(Old Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

- સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ સાત પ્રશ્નો છે.
(2) બધા જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.
(3) દરેક પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (a) સદિશ અવકાશની વ્યાખ્યા આપો.

જો $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ હોય તથા $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ અને

$\alpha \bar{x} = (\alpha x_2, 0)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો \mathbb{R}^2 વાસ્તવિક સદિશ અવકાશ છે ?
તમારા જવાબનું સમર્થન કરો.

અથવા

- (a) સદિશ અવકાશના ઉપાવકાશની વ્યાખ્યા આપો. જો A અને B એ સદિશ અવકાશ V ના બે ઉપાવકાશો હોય તો સાબિત કરો કે $A + B$ પણ V નું ઉપાવકાશ છે.

- (b) ગમે તે બે ગણો :

(1) સાબિત કરો કે $A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ એ \mathbb{R}^3 નું ઉપાવકાશ છે.

(2) \mathbb{R}^3 ના ઉપાવકાશ SP $\{(1, 2, 1), (-1, 3, 2), (4, 5, -3)\}$ માં સદિશો $(2, 1, 1)$ અને $(1, 1, 2)$ આવેલાં છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

(3) જો A એ સદિશ અવકાશ V નો અરિકત ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે

(i) $[A] = A \Leftrightarrow A$ એ V નું ઉપાવકાશ છે.

(ii) $[[A]] = [A]$.

2. (a) \mathbb{R}^n ના સદિશોની સુરેખ સ્વાયત્તતા અને સુરેખ અવલંબનની વ્યાખ્યા આપો.

સાબિત કરો કે સુરેખ સ્વાયત્ત ગણનો દરેક ઉપગણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

અથવા

(a) સાન્ત પરિમાણીય સદિશ અવકાશ V ના કોઈપણ સુરેખ સ્વાયત્ત ગણને V નાં આધાર સુધી વિસ્તૃત કરી શકાય છે તેમ બતાવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

(1) \mathbb{R}^2 ના આધાર $\{(3, 4), (4, 3)\}$ ને સાપેક્ષ સદિશ $(25, 25)$ ના યામ મેળવો.

(2) જો \mathbb{R}^3 ના ત્રણ સદિશો $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ સુરેખ સ્વાયત્ત હોય તો બતાવો કે $\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z} + \bar{x}$ પણ સુરેખ સ્વાયત્ત છે.

(3) ગણ $\{(1, 0, 1)\}$ ને \mathbb{R}^3 ના બે ભિન્ન આધાર સુધી લંબાવો.

3. (a) સુરેખ પરિવર્તનની વ્યાખ્યા આપો.

સાબિત કરો કે જો $T : U \rightarrow V$ સુરેખ પરિવર્તન હોય

$$\Leftrightarrow T(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y})$$

$$\forall x, y \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

અથવા

(a) ધારો કે $T : U \rightarrow V$ સુરેખ પરિવર્તન છે. સાબિત કરો કે T એક-એક હોય તો અને તો જ $N(T) = \{\theta_U\}$.

(b) ગમે તે બે ગણો :

(1) સાબિત કરો કે $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ સુરેખ પરિવર્તન છે તેમજ $N(T)$ અને $R(T)$ શોધો.

(2) સાબિત કરો કે સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ વ્યસ્ત સંપન્ન છે અને T^{-1} મેળવો.

(3) સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(1, 1) = (2, 0, 1)$ અને $T(2, -1) = (1, -1, 1)$ હોય તો $T(x, y)$ મેળવો તેમજ $T(2, 3)$ શોધો.

4. (a) સુરેખ પરિવર્તન સાથે સંકળાયેલ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો.

જો $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$ આપેલ સુરેખ પરિવર્તન હોય અને $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ અને \mathbb{R}^2 ના આધાર હોય તો શ્રેણિક $[T : B_1, B_2]$ મેળવો.

અથવા

(a) પ્રચલિત સંકેતમાં શાંકવનું ધ્રુવીય સમીકરણ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ સ્વરૂપે મેળવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

(1) સુરેખ પરિવર્તન $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ મેળવો કે જેથી $A = [T : B_1, B_2]$ થાય જ્યાં

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ અને } B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\} \text{ તેમજ } B_2 = \{(1, -1, -1),$$

$(1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ એ અનુક્રમે \mathbb{R}^2 અને \mathbb{R}^3 માં ક્રમિત આધારો છે.

(2) સમીકરણ $15 - 3r = r \cos \theta$ કયા પ્રકારનો શાંકવ દર્શાવે છે ? તેના નાભિલંબની લંબાઈ મેળવો તેમજ તેનું કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

(3) ધ્રુવીય યામ પદ્ધતિમાં $(2, \pi/6)$ અને $(\sqrt{3}, \pi/3)$ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ શોધો. તેના પર ધ્રુવમાંથી દોરેલાં લંબની લંબાઈ શોધો.

5. (a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં બિંદુ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) સાબિત કરો કે માં \mathbb{R}^3 સમતલ અને ગોલકનો સામાન્ય છેદ એક વર્તુળ છે.

(b) ગમે તે બે ગણો :

(1) 'a' ની કઈ કિંમત માટે સમતલ $x + y + z = a$ ગોલક

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0 \text{ ને સ્પર્શે ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શબિંદુઓ થાય ?}$$

(2) સાબિત કરો કે ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ અને

$$x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0 \text{ બહારથી સ્પર્શે છે.}$$

(3) વર્તુળ $\vec{r}^2 - 2\vec{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0$, $\vec{r} \cdot (1, 5, -7) = 45$ ના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધો.

6. (a) \mathbb{R}^3 માં બિંદુ (α, β, γ) માંથી પસાર થતી અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ને સ્પર્શતી સર્જક રેખાઓવાળા પરિસ્પર્શી શંકુનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) \mathbb{R}^3 માં સુરેખા $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ જેનો અક્ષ હોય અને ત્રિજ્યા r હોય એવા

સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

- (1) શિરોબિંદુ (α, β, γ) અને આધારવક $y^2 = 4ax, z = 0$ હોય એવા શંકુનું સમીકરણ શોધો.
- (2) સાબિત કરો કે $xy + yz + zx = 0$ સમશંકુ દર્શાવે છે તેના શીર્ષ, અર્ધ શિર:કોણ અને અક્ષ મેળવો.
- (3) એક સમનળાકાર $(4, -5, 3)$ બિંદુમાંથી પસાર થાય છે તેનો અક્ષ z -અક્ષ ને સમાંતર તથા $(5, -2, 6)$ માંથી પસાર થાય છે. આ સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

7. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(a) પરવલયજ $ax^2 + by^2 = 2z$ ના તેની પરના બિંદુ (α, β, γ) આગળના સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે બે ગણો :

- (1) એકપૃષ્ઠી અતિવલયજ $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ ના સમતલ $20x + 4y - 21z = 19$ ને સમાંતર સ્પર્શતલોના સમીકરણો અને તેમના સ્પર્શબિંદુઓ મેળવો.
- (2) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને બિંદુ A, B, C માં છેદે છે તો સાબિત કરો કે ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.
- (3) સાબિત કરો કે λ ની દરેક કિંમત માટે સમતલ

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2 \right) = 1, \text{ શાંકવજ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ ને સ્પર્શે છે}$$

Seat No. : _____

FB-02
Mathematics Paper-II
(Old Course)

Time : 3 Hours]

[Total Marks : 105

- Instructions :** (1) There are seven questions in this question paper.
(2) Attempt **all** questions.
(3) All questions carry equal marks.

1. (a) Define vector space.

If $\bar{x} = (x_1, x_2)$, $\bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ and $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ and

$\alpha \bar{x} = (\alpha x_2, 0)$ $\alpha \in \mathbb{R}$ are defined in \mathbb{R}^2 , is \mathbb{R}^2 a vector space ? Justify your answer.

OR

- (a) Define subspace of the vector space. If A and B are two subspaces of vector space V then prove that $A + B$ is also subspace of V.

- (b) Attempt any **two** :

- (1) Prove that $A = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ is a subspace of \mathbb{R}^3 .
- (2) Determine whether the vectors $(2, 1, 1)$ and $(1, 1, 2)$ belongs to the subspace SP $\{(1, 2, 1), (-1, 3, 2), (4, 5, -3)\}$ of \mathbb{R}^3 or not.
- (3) If A is a non-empty subset of a vector space V then prove that
- (i) $[A] = A \Leftrightarrow A$ is a subspace of V
- (ii) $[[A]] = [A]$

2. (a) Define linear independence and linear dependence of vector of \mathbb{R}^n .

Prove that every subset of a linearly independent set is linearly independent.

OR

- (a) Every linearly independent subset of a finite dimensional vector space V can be extended up to a basis of V .
- (b) Attempt any **two** :
- (1) Obtain co-ordinates of the vector $(25, 25)$ of the vector space \mathbb{R}^2 with respect to the basis $\{(3, 4), (4, 3)\}$.
 - (2) If $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ are three linearly independent vectors of \mathbb{R}^3 , prove that $\bar{x} + \bar{y}, \bar{y} + \bar{z}, \bar{z} + \bar{x}$ are also linearly independent vectors.
 - (3) Extend the set $\{(1, 0, 1)\}$ to two different bases of vector space \mathbb{R}^3 .

3. (a) Define linear transformation. Prove that if $T : U \rightarrow V$ is linear transformation

$$\Leftrightarrow T(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y}).$$

$$\forall x, y \in U, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

OR

- (a) $T : U \rightarrow V$ is linear transformation. Prove that T is one-one if and only if $N(T) = \{\theta_U\}$.

- (b) Attempt any **two** :

- (1) Prove that $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ is linear transformation. Also find $N(T)$ and $R(T)$.
- (2) Prove that the linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$ is non-singular. Also find T^{-1} .
- (3) For linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(1, 1) = (2, 0, 1)$ and $T(2, -1) = (1, -1, 1)$, then find $T(x, y)$. Also find $T(2, 3)$.

4. (a) Define matrix associated with a linear transformation.

If $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ $\theta \in \mathbb{R}$ is linear transformation and $B_1 = B_2 = \{e_1, e_2\}$ are bases in \mathbb{R}^2 then find $[T : B_1, B_2]$.

OR

- (a) In usual notations obtain the polar equation of a conic in \mathbb{R}^2 as $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

(b) Attempt any **two** :

(1) Obtain the linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ so that $A = [T : B_1, B_2]$

where $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ and $B_1 = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ and

$B_2 = \{(1, -1, -1), (1, 2, 3), (-1, 0, 2)\}$ are ordered basis of \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 respectively.

(2) Which conic is represented by the equation $15 - 3r = r \cos \theta$? Obtain length of latusrectum & its Cartesian equation.

(3) Find the polar equation of the straight line passing through $(2, \pi/6)$ and $(\sqrt{3}, \pi/3)$. Find the length of perpendicular drawn from the pole upon it.

5. (a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ in \mathbb{R}^3 .

OR

(a) Prove that the intersection of sphere and plane is a circle.

(b) Attempt any **two** :

(1) For what value of 'a' the plane $x + y + z = a$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$? Obtain the point of contact.

(2) Prove that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y + 4z - 13 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 36y - 14z + 73 = 0$ touch each other externally.

(3) Find centre and radius of the circle

$$\bar{r}^2 - 2 \bar{r} \cdot (1, -2, 3) + 3 = 0, \bar{r} \cdot (1, 5, -7) = 45.$$

6. (a) Obtain the equation of an enveloping cone having generator touching a sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and passing through a point (α, β, γ) in \mathbb{R}^3 .

OR

(a) Obtain the equation of right circular cylinder having axis

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n} \text{ and radius } r \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

(b) Attempt any **two** :

- (1) Obtain the equation of a cone having vertex at (α, β, γ) and guiding curves $y^2 = 4ax, z = 0$.
- (2) Prove that the equation $xy + yz + zx = 0$ represents a right circular cone and also find its axis, the vertex and the semivertical angle.
- (3) If the axis of the right circular cylinder passing through $(4, -5, 3)$ is parallel to z-axis and passes through point $(5, -2, 6)$ then find the equation of right circular cylinder.

7. (a) Obtain the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also find point of contact.

OR

(a) Obtain the equation of the tangent plane at point (α, β, γ) to the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2z$.

(b) Attempt any **two** :

- (1) Find the equation of the tangent plane and the point of contact to the hyperboloid $5x^2 - 4y^2 + 7z^2 = 139$ of one sheet parallel to the plane $20x + 4y - 21z = 139$.
- (2) If the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the co-ordinate axes in A, B, C then prove that the locus of centroid of ΔABC is $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$.

(3) Prove that for all values of λ , the plane

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2z}{c} + \lambda \left(\frac{x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{z}{c} - 2 \right) = 1 \text{ touches the conicoid}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
