Seat No. : _______________

FS(R)-06

April-2007

Mathematics

Paper-II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : ??**

સૂચના : (1) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **સાત** પ્રશ્નો છે.
(2) **બધા** જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.
(3) **દરેક** પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (a) ઉદાહરણ સહિત નીચેનાં શ્રેણિકોની વ્યાખ્યા આપો.
   (i) નિમ્ન ત્રકોણીય
   (ii) વિકર્ણી
   (iii) વિ – હરમિશીયન

અથવા

(a) પરિવર્ત શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. જો A એ $m \times n$ શ્રેણિક અને B એ $n \times p$ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $(AB)^T = B^T A^T$.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ નો કોટિ શોધો.

(c) ગમે તે **એક** નો ઉત્તર આપો.
   (i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & -i & -4-2i \end{bmatrix}$ હોય તો A^*A મેળવો.
   (ii) જો શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ હોય, તો A^{-1} શોધો.

2. (a) જો λ એ સામાન્ય શ્રેણિક $A = [aij]_n$ નું ઈજેન મૂલ્ય હોય તો બતાવો કે
   (i) $\frac{1}{\lambda}$ એ A^{-1} નું ઈજેન મૂલ્ય છે.
   (ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ એ adj A નું ઈજેન મૂલ્ય છે.

(b) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

(c) શ્રેણિક A $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ નું લાક્ષણિક સમીકરણ શોધો અને કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેયની ચકાસણી કરો તથા A^{-1} શોધો.

અથવા

(a) કેલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(b) સાબિત કરો કે નીચેની સુરેખ સમીકરણ સંહતિ સુસંગત છે.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4$$

(c) ક્રેમરના નિયમથી નીચેના સમીકરણનો ઉકેલ મેળવો.

$x + y + z = 9, \quad 2x + 5y + 7z = 52, \quad 2x + y - z = 0$

3. (a) બહુપદી $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, $a_0 \neq 0$ ને બરોબર (exactly) n બીજ છે. $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$, $n \in N$

અથવા

(a) ફેરારીની રીતે સમીકરણ $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ ઉકેલો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) સમીકરણ $4x^3 - 16x^2 + 9x + 9 = 0$ નાં બે બીજોનો ગુણોત્તર $\frac{1}{2}$ હોય તો સમીકરણનાં બીજ શોધો.

(ii) કાર્ડનની રીતે સમીકરણ $x^3 + 3x^2 - 27x + 10^4 = 0$ ઉકેલો.

(iii) જો α, β, γ એ સમીકરણ $x^3 + px^2 + qx + \gamma = 0$ નાં બીજ હોય તો જેનાં બીજ નીચે પ્રમાણે હોય એવા સમીકરણો મેળવો.

(i) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

(ii) $\alpha + \frac{1}{\beta\gamma}, \beta + \frac{1}{\gamma\alpha}, \gamma + \frac{1}{\alpha\beta}$

4. (a) a ત્રિજ્યાવાળા અને (ρ, α) કેન્દ્રવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો. જો વર્તુળ ધ્રુવમાંથી પસાર થાય તો વર્તુળનું સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) બે બિંદુઓ $A(r_1, \theta_1)$ અને $B(r_2, \theta_2)$ માંથી પસાર થતી રેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) જો P' SP અને Q' SQ એ શાંકવની બે પરસ્પર લંબ નાભિજીવાઓ હોય તો સાબિત કરો કે $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'}$ = અચળ

(ii) જો R^3 માં કોઈ બિંદુના ગોલીય યામ $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ હોય તો તેના કાર્તેઝીય અને સિલિન્ડરીય યામ મેળવો.

(iii) $x^2 = 4(1 + y)$ સમીકરણનું ધ્રુવીય યામમાં રૂપાંતર કરો.

5. (a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરનાં બિંદુ $p(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો R^3.

અથવા

(a) વ્યાસાંત બિંદુઓ $A(x_1, y_1, z_1)$ અને $B(x_2, y_2, z_2)$ હોય તેવા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) ‘a’ ની કઈ કિંમત માટે સમતલ $x + y + z = a$ ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$ ને સ્પર્શે ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શ ? કયા બિંદુઓ સ્પર્શબિંદુઓ થાય ?

(ii) વર્તુળ $x^2 + y^2 + z^2 = 15, 2x + 4y + 5z = 7$ અને $(1, -1, 1)$ બિંદુમાંથી પસાર થતાં ગોલકનું સમીકરમ મેળવો.

(iii) સમતલ $x + 2y + 2z + 6 = 0$ ને $(-2, -2, 0)$ બિંદુએ સ્પર્શતા અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ ને લંબચ્છેદી ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

6. (a) પ્રચલિત સંકેત મુજબ R^3 માં જે નું શીર્ષ r (α, β, γ) અર્ધ શીર:કોણ θ તથા અક્ષ $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ હોય તેવા સમ શંકુનું સમીકરમ મેળવો. $(\theta \neq 0, \theta \neq \frac{\pi}{2})$

અથવા

(a) R^3 માં $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ સુરેખાને સમાંતર અને ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ગોલકને સ્પર્શતી સર્જકરેખાના પરિભ્રમણથી રચાતાં પરિસ્પર્શી નળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) જેનો અક્ષ સુરેખા $x = y = z$ હોય અને $2x = 3y = -5z$ સુરેખા માંથી પસાર થતા સમશંકુનું સમીકરણ મેળવો.

(ii) R^3 માં જેનો આધાર વક્ર $y^2 + 2z^2 = 1, x - 3z = 0$ અને સર્જક રેખાઓ z-અક્ષને સમાંતર હોય તેવાં નળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

(iii) 2 એકમ ત્રિજ્યાવાળા સમનળાકારનો અક્ષ $\{(1, 3, 2k) / K \in R\}$ હોય તો તે સમનળાકારનું સમીકરણ મેળવો.

7. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(a) સાબિત કરો કે પરવલયજ $by^2 + cz^2 = 4ax$ ને આપેલાં બિંદુમાંથી વધુમાં વધુ પાંચ અભિલંબો દોરી શકાય છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) કેન્દ્રીય શાંકવજને $A(\alpha, \beta, \gamma)$ બિંદુએ દોરેલો અભિલંબ યામ સમતલ xy, yz, zx ને અનુક્રમે G_1, G_2, G_3 માં મળે તો સાબિત કરો કે $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^{-1} : b^{-1} : C^{-1}$.

(ii) શાંકવજ $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ અને સુરેખા $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$ નાં છેદબિંદુઓ મેળવો.

(iii) સાબિત કરો કે સમતલ $7x + 5y + 3z = 30$ એ ઉપવલયજ $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ ને સ્પર્શે છે અને તેનું સ્પર્શબિંદુ (2, 2, 2) છે.

Seat No. : _______________

FS(R)-06

April-2007

Mathematics

Paper-II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : ??**

Instructions : (1) There are **seven** questions.
(2) **All** questions are compulsory.
(3) **All** questions carry equal marks.

1. (a) Define the following matrices with illustration.
   (i) Lower triangular
   (ii) Diagonal
   (iii) Skew – Mermitian

   OR

   (a) Define Transpose of a matrix. If A is m $\times$ n matrix and B is n $\times$ p matrix then prove that $(AB)^T = B^T A^T$.

   (b) Find the rank of the matrix

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 12 & -1 \end{bmatrix}$$

   (c) Attempt any one.

   (i) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2+i & 3 & -1+3i \\ -5 & -i & -4-2i \end{bmatrix}$ obtain $A^{*}A$.

   (ii) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}.

2. (a) If λ is an eigen value of an invertible matrix $A = [aij]_n$, then show that.

   (i) $\frac{1}{\lambda}$ is the eigen value of A^{-1}.

   (ii) $\frac{|A|}{\lambda}$ is the eigen value of adj A

   (b) Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix.

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) Obtain the characteristic equation of the matrix $A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ and verify the Cayley-Hamilton theorem for A, Also find A^{-1}.

OR

(a) State and prove Caley-Hamilton theorem.

(b) Prove that the following system of equations is consistent.

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3$

$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 4$

(c) Solve the following equations by Crammer's rule.

$x + y + z = 9, \qquad 2x + 5y + 7z = 52, \qquad 2x + y - z = 0$

3. (a) An equation $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0$ has exactly n roots, $a_i \in R$, $i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n$, $n \in N$

OR

(a) Solve the equation $x^4 + 3x^3 + x^2 - 2 = 0$ using Ferrari's method.

(b) Attempt any **two**.

(i) If the ratio of two roots of the equation $4x^3 - 16x^2 + 9x + 9 = 0$ is $\frac{1}{2}$, find the roots of the equation.

(ii) Solve the equation $x^3 + 3x^2 - 27x + 10^4 = 0$ using Cardon's method.

(iii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + \gamma = 0$ then find the equations whose roots are

(i) $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$

(ii) $\alpha + \frac{1}{\beta\gamma}, \beta + \frac{1}{\gamma\alpha}, \gamma + \frac{1}{\alpha\beta}$

4. (a) Obtain the polar equation of circle having centre (ρ, α) and radins 'a'. If circle passes through pole, what is its equation ?

OR

(a) Find the polar equation of a line passing through the points $A(r_1, \theta_1)$ and $B(r_2, \theta_2)$.

(b) Attempt any **two**.

(i) If P' SP and Q' SQ are mutually perpendicular focal chords of a conic, then prove that $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'}$ = constant.

(ii) If the spherical Co-ordinates of a point in R^3 are $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ then find its Cartesian and cylindrical Co-ordinates.

(iii) Transform the following equation in to Polar equation.

$x^2 = 4(1 + y)$.

5. (a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $p(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

OR

(a) Equation of the sphere, having extremities $A(x_1, y_1, z_1)$ and $B(x_2, y_2, z_2)$ of its diameter.

(b) Attempt any **two**.

(i) For what value of 'a' the plane $x + y + z = a$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 13 = 0$?

Obtain the point of contact.

(ii) Find the equation of the sphere passing through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = 15$, $2x + 4y + 5z = 7$ and a point $(1, -1, 1)$.

(iii) Find the equation of the orthogonal sphere to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 2z + 8 = 0$ and touching the plane $x + 2y + 2z + 6 = 0$ at the point $(-2, -2, 0)$

6. (a) In usual notation obtain the equation of right circular cone whose vertex is r (α, β, γ) semi-vertical angle is θ and the axis is the straight line $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$. $(\theta \neq 0, \theta \neq \frac{\pi}{2})$

OR

(a) Obtain the equation of enveloping cylinder generated by revolving straight line parallel to st. line $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ and touching. the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

(b) Attempt any **two**.

(i) Find the equation of the right circular cone which passes through the line $2x = 3y = -5z$ and whose axis is the straight line $x = y = z$.

(ii) Find the equation of a cylinder whose generators are parallel to z-axis and the guiding curve is $y^2 + 2z^2 = 1, x - 3z = 0$.

(iii) If axis of the right circular cylinder of radius 2 units is $\{(1, 3, 2k) / K \in R\}$ then find the equation of the right circular cylinder.

7. (a) Obtain the condition that the plane $lm + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and point of their contact.

OR

(a) Show that at most five normals can be drawn to the paraboloid $by^2 + cz^2 = 4ax$ from a given point.

(b) Attempt any **two**.

(i) If the normal to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ at a point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ meets the Co-ordinate planes xy, yz and zx respectively at G_1, G_2 and G_3 then prove that $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^{-1} : b^{-1} : C^{-1}$.

(ii) Find the points of intersection of the conicoid $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ and the straight line, $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$

(iii) Prove that the plane $7x + 5y + 3z = 30$ touches the ellipsoid $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ and their point of contact is (2, 2, 2)