Seat No. : ______________

FA-76

March-2007

Mathematics (F.S.)

Paper-I

(New Course)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

સૂચના : (1) **બધા** જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.
(2) **દરેક** પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

1. (અ) લાયબ્નીઝનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો.

(i) જો $y = \dfrac{x + 13}{x^2 + x - 6}$ $(x \neq -3, 2)$ તો y_n શોધો.

(ii) જો $x = \tan(\log y)$ તો સાબિત કરો કે $(1 + x^2)\, y_{n+1} + (2nx - 1)\, y_n + n(n-1)\, y_{n-1} = 0.$

(iii) જો $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^m$ હોય તો સાબિત કરો કે

$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, x \cdot y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0.$

2. (અ) વાસ્તવિક પદોની શ્રેઢી $\sum a_n$ ને અભિસારી ક્યારે કહેવાય ? જો વાસ્તવિક શ્રેઢી $\sum a_n$ અભિસારી હોય તો સાબિત કરો કે $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. આ પ્રમેયનો પ્રતિપ્રમેય સાચો છે ? તમારા જવાબને અનુરૂપ એવું ઉદાહરણ આપો.

અથવા

(અ) કોશીની મૂળ કસોટી શ્રેઢી માટે લખો અને સાબિત કરો.

(બ) અભિસારીતા ચર્ચો. (ગમે તે **બે**) :

(i) $\dfrac{1}{1\cdot3} + \dfrac{1}{3\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot7} + \dfrac{1}{7\cdot9} + \ldots\ldots$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}\right)$

(iii) $\dfrac{x}{2\cdot3} + \dfrac{x^2}{3\cdot4} + \dfrac{x^3}{4\cdot5} + \ldots\ldots\ldots$

(ક) ઘાત શ્રેઢી $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{4^n} x^n$ ની અભિસાર ત્રિજ્યા મેળવો.

3. (અ) કોશીનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

(બ) ગમે તે **ત્રણ** ના જવાબ આપો.

(i) સાબિત કરો કે $0 < \frac{1}{x} \cdot \log\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) < 1,\ x > 0.$

(ii) સાબિત કરો કે $e^x \cdot \sin x = 1$ ના બે વાસ્તવિક બીજની વચ્ચે સમીકરણ $e^x \cdot \cos x + 1 = 0$ નું ઓછામાં ઓછું એક બીજ છે.

(iii) $\sin x - \cos x$ નું $x - \frac{\pi}{4}$ ની ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(iv) $\log(1 + \sin x)$ નું પ્રથમ ત્રણ પદો સુધી x ના ચઢતા ઘાતમાં વિસ્તરણ કરો.

(v) લક્ષ મેળવો : $\lim\limits_{x \to 0} x \log(\tan x),\ x \in (0, \frac{\pi}{2})$

4. (અ) $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો તે પરથી I_9 અને I_{10} નાં મૂલ્યો શોધો.

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો.

(i) સરવાળાના લક્ષ તરીકે દર્શાવી $\int_a^b e^x dx$ ની કિંમત મેળવો.

(ii) સંકલનની રીતે a ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું વક્ર પૃષ્ઠફળ મેળવો.

(iii) વક્ર $y = x^{\frac{3}{2}}$ પરનાં બિંદુ (0, 0) થી (1, 1) સુધીના ચાપની લંબાઈ શોધો.

(iv) ઉપવલય $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ નું તેના પ્રધાનાક્ષ આસપાસ પરિભ્રમણ કરાવવાથી રચાતી ઘનાકૃતિનું ઘનફળ શોધો.

5. (અ) લાગ્રાંજના વિકલ સમીકરણ $y = x f(p) + g(p)$ ના ઉકેલની રીત સમજાવો. જ્યાં $p = \frac{dy}{dx}$

અથવા

ક્લેરોટના સમીકરણનું વ્યાપક સ્વરૂપ લખો અને ઉકેલો.

(બ) ગમે તે **ત્રણ** ના જવાબ આપો :

(i) ઉકેલો : $(x^2 - y^2)\, dy = 2xy\, dx$

(ii) ઉકેલો : $(e^y + 1) \cos x\, dx + e^y \sin x\, dy = 0$

(iii) ઉકેલો : $p^2 - (x + 5y)\, p + 4y\, (x + y) = 0$

(iv) ઉકેલો : $p^2 - 6p + 8 = 0,\ p = \frac{dy}{dx}$

(v) ધ્રુવમાંથી પસાર થતાં એવાં તમામ વર્તુળોનું ધ્રુવીય વિકલ સમીકરણ મેળવો.

6. (અ) ગમે તે **એક** સાબિત કરો :

(i) $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} \cdot e^{ax}$, જ્યાં $f(a) \neq 0$

(ii) $\frac{1}{f(D)} e^{ax} F(x) = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} F(x)$, જ્યાં $f(D + a) \neq 0$

(બ) ગમે તે **બે** ના ઉકેલ મેળવો.

(i) $(D^2 + 1)^3 \cdot (D^2 + D + 1)^2 \cdot y = 0$

(ii) $(D^2 + 2D + 1) y = e^x$

(iii) $2(x + 1) y'' + y' - 8y = 0$

7. (અ) વેગ અને પ્રવેગનાં અરીય અને અનુપ્રસ્થ સંઘટકો મેળવો.

(બ) ગમે તે **બે** ના જવાબ આપો.

(i) એક કણ સાદી સ્વરિત હોય તેના કેન્દ્રથી અંતરો 1 અને 2 હોય ત્યારે તેની વેગની કિંમતો 3 અને 2 પ્રતિ સેકંડ છે તો તેનો કંપવિસ્તાર અને આવર્તકાળ શોધો.

(ii) એક કણને ક્ષૈતિજ સાથે 60° ના ખૂણે ઉપર તરફ ફેંકવામાં આવે છે. મહત્તમ ઊંચાઈએ તેનો વેગ પ્રારંભિક વેગ કરતાં અડધો હોય છે તેમ સાબિત કરો.

(iii) ઊગમબિંદુમાંથી દોરવામાં આવેલી સદિશ ત્રિજ્યાની દિશામાં તેમજ તેની લંબદિશામાં ગતિ કરતાં કણનો વેગ λr^2 અને $\mu\theta^2$ છે. તો કણના પ્રવેગના અરીય અને અનુપ્રસ્થ સંઘટકો શોધો.

Seat No. : _______________

FA-76

March-2007

Mathematics (F.S.)

Paper-I

(New Course)

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 105**

Instructions : (1) Attempt **all** the questions.

(2) **Each** question carries equal marks.

1. (a) State and prove Leibnitz theorem.

(b) Attempt any **two** :

(i) If $y = \dfrac{x + 13}{x^2 + x - 6}$ $(x \neq -3, 2)$ then find y_n.

(ii) If $x = \tan(\log y)$ then prove that $(1 + x^2)\, y_{n+1} + (2nx - 1)\, y_n + n\,(n - 1)\, y_{n-1} = 0$.

(iii) If $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^m$ then prove that

$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, x \cdot y_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$.

2. (a) When is a series $\sum a_n$ of real terms said to be convergent ? If a real series $\sum a_n$ is convergent then prove that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Is the converse of this theorem true ? Give one example.

OR

(a) State and prove Cauchy root test for series.

(b) Discuss the convergence : (any **two**)

(i) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 9} + \ldots\ldots$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}\right)$

(iii) $\dfrac{x}{2\cdot 3} + \dfrac{x^2}{3\cdot 4} + \dfrac{x^3}{4\cdot 5} + \ldots\ldots\ldots$

(c) Obtain radius of the convergence of the power series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^3}{4^n} x^n$.

3. (a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

(b) Attempt any **three** :

(i) Prove that $0 < \frac{1}{x} \cdot \log\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) < 1$, $x > 0$.

(ii) Prove that at least one root of the equation $e^x \cdot \cos x + 1 = 0$ lies between two real roots of the equation $e^x \cdot \sin x = 1$.

(iii) Expand $\sin x - \cos x$ in power of $x - \frac{\pi}{4}$.

(iv) Expand $\log(1 + \sin x)$ into the ascending powers of x upto three terms.

(v) Obtain limit : $\lim_{x \to 0} x \log(\tan x)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

4. (a) Obtain the reduction formula for $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ and hence evaluate the values of I_9 and I_{10}.

(b) Attempt any **two** :

(i) Expressing limit of sum evaluate $\int_a^b e^x \, dx$.

(ii) Obtain the curved surface area of the sphere with radius a by integration.

(iii) Find the Length of the arc of the curve $y = x^{\frac{3}{2}}$ from the point (0, 0) to (1, 1).

(iv) Find the volume of the solid generated by the revolution around major axis of the ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

5. (a) Explain the method of solving Lagrange's differential equation $y = x f(p) + g(p)$, where $p = \frac{dy}{dx}$

OR

Write Clairant's equation in general form and solve it.

(b) Attempt any **three** :

(i) Solve : $(x^2 - y^2)\, dy = 2xy\, dx$

(ii) Solve : $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$

(iii) Solve : $p^2 - (x + 5y)\, p + 4y\,(x + y) = 0$

(iv) Solve : $p^2 - 6p + 8 = 0$, $p = \frac{dy}{dx}$

(v) Find the Polar differential equation of all circles passing through the pole.

6. (a) Prove any **one** :

(i) $\frac{1}{f(D)} e^{ax} = \frac{1}{f(a)} \cdot e^{ax}$, where $f(a) \neq 0$

(ii) $\frac{1}{f(D)} e^{ax} F(x) = e^{ax} \cdot \frac{1}{f(D + a)} F(x)$, where $f(D + a) \neq 0$

(b) Solve (any **two**)

(i) $(D^2 + 1)^3 \cdot (D^2 + D + 1)^2 \cdot y = 0$

(ii) $(D^2 + 2D + 1) y = e^x$

(iii) $2(x + 1) y'' + y' - 8y = 0.$

7. (a) Find the Radial and Transverse components of velocity and acceleration.

(b) Attempt any **two** :

(i) 3' and 2' per second are velocities of a particle moving in simple harmonic motion at distances 1' and 2' from the centre. Find its amplitude and periodic time.

(ii) A particle is projectile upward in a direction inclined at 60° to the horizontal. Show that its velocity when its greatest height is half its initial velocity.

(iii) The radial and transverse components of velocity of a moving particle are λr^2 and $\mu\theta^2$. Find the radial and transverse components of its acceleration.