Seat No. : ______________

FA-111

March-2007

Mathematics (First Subsidiary)

Paper-II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

સૂચના : (૧) આ પ્રશ્નપત્રમાં કુલ **પાંચ** પ્રશ્નો છે.

(૨) **બધા** જ પ્રશ્નોના જવાબ લખો.

(૩) **દરેક** પ્રશ્નના ગુણ સરખા છે.

૧. (a) ઉદાહરણ સહિત નીચેના શ્રેણિકોની વ્યાખ્યા આપો.

(i) ઉર્ધ્વ ત્રિકોણીય

(ii) વિકર્ણી

(iii) વિ-સંમિત

અથવા

(a) સહ અવયવજ શ્રેણિકની વ્યાખ્યા આપો. જો $A = [a_{ij}]_n$ એ n – કક્ષાનો ચોરસ શ્રેણિક હોય તો સાબિત કરો કે $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)\,A = |A|\, I_n$.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળારૂપે રજૂ કરો.

(ii) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ હોયતો A^{-1} શોધો.

(iii) શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ના લાક્ષણિક મૂલ્યો અને લાક્ષણિક સદિશ શોધો.

૨. (a) કૅલે-હેમીલ્ટન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.

અથવા

(a) ધારો કે $p(x)$ એ n ઘાતવાળી વાસ્તવિક બહુપદી છે. સાબિત કરો કે

(i) જો $p(x)$ ને સુરેખ બહુપદી $x - \alpha$ વડે ભાગીએ તો શેષ $p(\alpha)$ મળે.

(ii) જો $p(x)$ ને $(x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ વડે ભાગીએ તો શેષ

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)}\left[(x - \beta)\, p(\alpha) - (x - \alpha)\, p(\beta)\right]$$ છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) બતાવો કે $\begin{bmatrix} 3i & 1+i & 7 \\ -1+i & 0 & -2-i \\ -7 & 2-i & -i \end{bmatrix}$ એ વિ-હરમિશીયન શ્રેણિક છે.

(ii) સમીકરણ $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ નાં બે બીજોનો સરવાળો શૂન્ય હોય તો સમીકરણનાં બીજ શોધો.

(iii) કાર્ડનની રીતે સમીકરણ $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ ઉકેલો.

૩. (a) કેન્દ્ર (ρ, α) અને a ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ધ્રુવીય સમીકરણ મેળવો.

અથવા

(a) સુરેખાનું ધ્રુવીય સમીકરણ $P = r\cos(\theta - \alpha)$ સ્વરૂપે મેળવો. અચળાંકો p અને α નું અર્થઘટન કરો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) સમીકરણ $\sqrt{3}x + y = 2$ નું ધ્રુવીય સમીકરણમાં રૂપાંતર કરો.

(ii) સાબિત કરો કે $r = 12 - 4r\cos\theta$ અતિવલયનું નિરૂપણ કરે છે તેનું કાર્તેઝીય સમીકરણ મેળવો.

(iii) જો α, β, γ એ સમીકરણ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ નાં બીજ હોય તો જેનાં બીજ $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ હોય તેવું સમીકરણ મેળવો.

૪. (a) R^3 માં ગોલકો $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ અને $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ જ્યાં $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - d_1 > 0, u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - d_2 > 0$, પરસ્પર લંબચ્છેદી બને તે માટેની શરત મેળવો.

અથવા

(a) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ પરના બિંદુ $p(\alpha, \beta, \gamma)$ આગળનાં સ્પર્શતલનું સમીકરણ મેળવો.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) વર્તુળ $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0, 3x + 4y - 2z = 10$ માંથી અને $(2, -1, 1)$ બિંદુમાંથી પસાર થતા ગોલકનું સમીકરણ મેળવો.

(ii) ગોલક $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$, સમતલ $kx - y - 2z = 4$ ને સ્પર્શે તો k નું મૂલ્ય શોધો.

(iii) 3 એકમ ત્રિજ્યા અને $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$ અક્ષ હોય તેવા સમનળાકાર નું સમીકરણ મેળવો.

5. (a) સમતલ $lx + my + nz = p$ કેન્દ્રીય શાંકવજ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ને સ્પર્શે તે માટેની શરત મેળવો તેમજ સ્પર્શબિંદુના યામ મેળવો.

અથવા

(a) જો R^3 માં શંકુનું શિરોબિંદુ ઉગમબિંદુ હોય તો સાબિત કરો કે શંકુનું સમીકરણ સમપરિમાણીય છે.

(b) ગમે તે **બે** ગણો.

(i) જેનું શીર્ષ ઉદ્‌ગમબિંદુ હોય અને નિર્દેશક વક્ર $x^2 + 2y^2 + 7z^2 = 5, 3x - 4y + z = 1$ હોય તેવા શંકુનું સમીકરણ શોધો.

(ii) ઉપવલયજ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ નું સ્પર્શતલ યામાક્ષોને બિંદુ A, B, C માં છેદે છે તો સાબિત કરો કે ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો પથ $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$ છે.

(iii) શાંકવજ $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ અને સુરેખા $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$ નાં છેદબિંદુઓ મેળવો.

Seat No. : _______________

FA-111

March-2007

Mathematics (First Subsidiary)

Paper-II

Time : 3 Hours] **[Max. Marks : 70**

Instructions : (1) There are **five** questions.
(2) Attempt **all** questions.
(3) **All** questions carry equal marks.

1. (a) Define the following matrices with illustration.
   (i) Upper triangular
   (ii) Diagonal
   (iii) Skew-Symmetric

   OR

   (a) Define adjoint of a matrix If $A = [a_{ij}]_n$ is a square matrix of order n, prove that $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A|\, I_n$.

   (b) Attempt any **two**.

   (i) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ as a sum of symmetric and skew symmetric matrices.

   (ii) For the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ obtain A^{-1}.

   (iii) Find the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. (a) State and prove Caley-Hamilton theorem.

   OR

   (a) Let $p(x)$ be a polynomial of degree n then prove the following :
   (i) If $p(x)$ is divided by a linear polynomial $x - \alpha$ then remainder is $p(\alpha)$.
   (ii) If $p(x)$ is divided by $(x - \alpha)(x - \beta)$, $\alpha \neq \beta$ then the remainder is
   $$\frac{1}{(\alpha - \beta)}\left[(x - \beta)\, p(\alpha) - (x - \alpha)\, p(\beta)\right]$$

(b) Attempt any **two**.

(i) Show that $\begin{bmatrix} 3i & 1+i & 7 \\ -1+i & 0 & -2-i \\ -7 & 2-i & -i \end{bmatrix}$ is a skew Hermitian matrix.

(ii) The sum of two roots of the equation $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$ is zero. Solve the equation (Find the roots).

(iii) Solve the equation $2x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ by Cardan's method.

3. (a) Obtain the polar equation of circle having centre (ρ, α) and radius 'a'.

OR

(a) Obtain the polar equation of a straight line whose distance from pole is P and angle made by the perpendicular from pole on it with initial line is α.

(b) Attempt any **two**.

(i) Transform the following equation into polar equation.

$\sqrt{3}x + y = 2$

(ii) Prove that the polar equation $r = 12 - 4r \cos \theta$ represents the hyperbola. Find its Cartesian equation.

(iii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ then find the equation whose roots are $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

4. (a) Obtain the condition that two spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_1x + 2v_1y + 2w_1z + d_1 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 + 2u_2x + 2v_2y + 2w_2z + d_2 = 0$ where $u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 - d_1 > 0$ and $u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 - d_2 > 0$ intersect each other orthogonally.

OR

(a) Obtain the equation of the tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ at the point $p(\alpha, \beta, \gamma)$ in R^3.

(b) Attempt any **two**.

(i) Find the equation of the sphere, passing through circle $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $3x + 4y - 2z = 10$ and point $(2, -1, 1)$ in R^3.

(ii) If the plane $kx - y - 2z = 4$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ find the value of k.

(iii) Find the equation of right circular cylinder having radius 3 units and axis.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{1}$$

5. (a) Obtain the condition that the plane $lx + my + nz = p$ touches the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and also find point of their contact.

OR

(a) If a vertax of a cone in R^3 is the origin then prove that the equation of the cone is homogeneous.

(b) Attempt any **two**.

(i) Find the equation of the cone, having vertex at origin and passing through the curve $x^2 + 2y^2 + 7z^2 = 5$, $3x - 4y + z = 1$

(ii) If the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ meets the Co-ordinate axes in A, B, C then prove that the locus of centroid of ΔABC is $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 9$

(iii) Find the points of intersection of the conicoid $2x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$ and the straight line, $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-9}{4}$